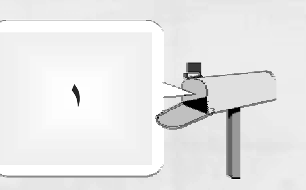


إذا كان المتوسط الحسابي لأربعة أعداد هو ٢٠٥ ، وعندما استبدلنا أحد هذه الأعداد بالعدد ٩٩ أصبح المتوسط الحسابي ٢٠٠ ، أوجد العدد الذي تم استبداله.

(المصدر – الأولمبياد الأول للرياضيات – المملكة العربية السعودية – التصفية الأولى – ٢٠٠٦م)



نفرض أن الأعداد هي : س ، ص ، ع ، ل

∴ (س + ص + ع + ل) / ٤ = ٢٠٥

∴ س + ص + ع + ل = ٤ × ٢٠٥ = ٨٢٠ ---------------------- (١)

بفرض أن العدد المستبدل هو : ل

∴ (س + ص + ع + ٩٩) / ٤ = ٢٠٠

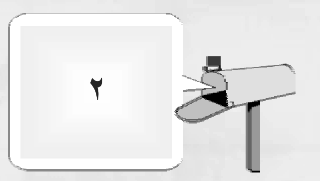
∴ س + ص + ع + ٩٩ = ٤ × ٢٠٠ = ٨٠٠

∴ س + ص + ع = ٨٠٠ − ٩٩ = ٧٠١ ---------------------- (٢)

بطرح (٢) من (١)

∴ ل = ٨٢٠ − ٧٠٢ = ١١٩

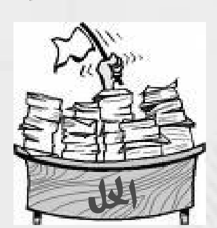
∴ العدد الذي تم استبداله هو : ١١٩.



على الشكل قسمنا المستطيل الكبير إلى ٩ مستطيلات صغيرة .
كتبنا داخل خمسة منها القيمة العددية لمساحتها .
احسب مساحة المستطيل : ك

٣	١	
	٢	ك
٥		١٠

(المصدر – بطولة كندا المفتوحة للرياضيات – مسابقة إقليدس – الأربعاء ١٩ ابريل ٢٠٠٦ م)



	س	ص	ع
٩	٣	١	
ب		٢	ك
جـ	٥		١٠

نرمز لطول وعرض كل مستطيل كما هو موضح بالشكل :

∴ ٩ س = ٣ ، ب س = ٥ -------------(١)

، ∴ ٩ ص = ١ ، جـ ص = ٢ -------------(٢)

، ∴ جـ ع = ١٠ ، ب ع = ك -------------(٣)

من (١) : $\frac{\text{٩ س}}{\text{جـ س}} = \frac{٣}{٥}$ ومنها $\frac{٩}{\text{جـ}} = \frac{٣}{٥}$ -------------(٤)

بالمثل : $\frac{٩}{\text{ب}} = \frac{١}{٢}$ -------------(٥)

، $\frac{\text{جـ}}{\text{ب}} = \frac{١٠}{\text{ك}}$ -------------(٦)

بقسمة : (٤) على (٥)

∴ $\frac{٩}{\text{جـ}} \div \frac{٩}{\text{ب}} = \frac{٣}{٥} \div \frac{١}{٢}$

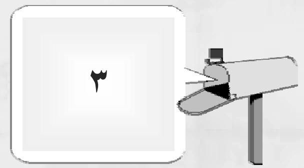
∴ $\frac{٩}{\text{جـ}} \times \frac{\text{ب}}{٩} = \frac{٣}{٥} \times \frac{٢}{١}$

∴ $\frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{٦}{٥}$ ∴ $\frac{\text{جـ}}{\text{ب}} = \frac{٥}{٦}$ ------------- (٧)

بمساواة (٦) ، (٧)

∴ $\frac{١٠}{\text{ك}} = \frac{٦}{٥}$

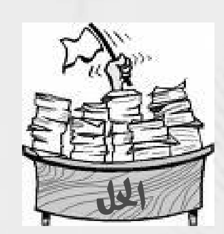
∴ ك = $\frac{١٠ \times ٦}{٥} = ١٢$



إذا كانت : $س = ٣ + \frac{١}{٣ + \frac{١}{س}}$ ، $ص = ٣ + \frac{١}{٣ + \frac{١}{٣ + \frac{١}{ص}}}$.

فأوجد : $|س - ص|$

(المصدر – مسابقة W.JBLUNDON رقم ٢١ برعاية هيئة الرياضيات الكندية -١٣فبراير ٢٠٠٠ م)



$$س = ٣ + \frac{١}{٣ + \frac{١}{س}} = ٣ + \frac{١}{\frac{٣س + ١}{س}} = ٣ + \frac{١}{٣س + ١} = \frac{١٠س + ٣}{٣س + ١}$$

$\therefore$ $س(٣س + ١) = ١٠ س + ٣$

$\therefore$ $٣ س^٢ + س = ١٠ س + ٣$

$\therefore$ $٣ س^٢ - ٩س - ٣ = ٠$ بالقسمة على ٣

$\therefore$ $س^٢ - ٣ س - ١ = ٠$ باستخدام القانون العام

$\therefore$ $س = \frac{٣ \pm \sqrt{١٣}}{٢}$

بالمثل : $ص = ٣ + \frac{١}{٣ + \frac{١}{٣ + \frac{١}{ص}}} = ٣ + \frac{١}{\frac{١٠ص + ٣}{٣ص + ١}} = ٣ + \frac{٣ص + ١}{١٠ص + ٣} = \frac{٣٣ص + ١٠}{١٠ص + ٣}$

$\therefore$ $ص(١٠ص + ٣) = ٣٣ ص + ١٠$

$\therefore$ $١٠ص^٢ + ٣ص = ٣٣ ص + ١٠$

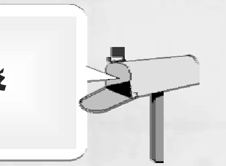
$\therefore$ $١٠ص^٢ - ٣٠ ص - ١٠ = ٠$ بالقسمة على ١٠

$\therefore$ $ص^٢ - ٣ص - ١ = ٠$ باستخدام القانون العام

$\therefore$ $ص = \frac{٣ \pm \sqrt{١٣}}{٢}$

$\therefore$ $|س - ص| = \left|\frac{٣ + \sqrt{١٣}}{٢} - \frac{٣ + \sqrt{١٣}}{٢}\right|$ أو $\left|\frac{٣ - \sqrt{١٣}}{٢} - \frac{٣ - \sqrt{١٣}}{٢}\right|$

$\therefore$ $|س - ص| = \{٠ \text{ أو } \sqrt{١٣}\}$.



إذا كان : أ + ب + ج + د = ١ فاثبت أن :–

$$\sqrt{\text{٤أ}+١} + \sqrt{\text{٤ب}+١} + \sqrt{\text{٤ج}+١} \leqslant ٦$$

(المصدر – اختبار التصفية الثانية لمسابقة المعلمين – الأربعاء ١٦ مارس ٢٠٠٥ – مملكة البحرين)



∵ أ + ب + ج + د = ١   بالضرب × ٤

∴ ٤أ + ٤ب + ٤ج + ٤ د = ٤   بإضافة ٤ للطرفين

∴ ٤أ + ٤ب + ٤ج + ٤ د + ٤ =٨

∴ (٤أ+ ١) + (٤ب + ١) + (٤ج + ١) + (٤ د + ١) = ٨

$$\therefore (\sqrt{\text{٤أ}+١})^{٢} + (\sqrt{\text{٤ب}+١})^{٢} + (\sqrt{\text{٤ج}+١})^{٢} + (\sqrt{\text{٤د}+١})^{٢} = ٨$$ بالضرب × ٤

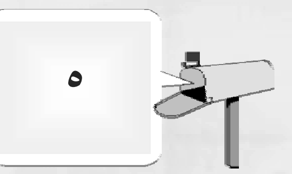
$$\therefore ٤\left\{(\sqrt{\text{٤أ}+١})^{٢} + (\sqrt{\text{٤ب}+١})^{٢} + (\sqrt{\text{٤ج}+١})^{٢} + (\sqrt{\text{٤د}+١})^{٢}\right\} = ٣٢$$

$$\therefore (\sqrt{\text{٤أ}+١})^{٢} + (\sqrt{\text{٤ب}+١})^{٢} + (\sqrt{\text{٤ج}+١})^{٢} + (\sqrt{\text{٤د}+١})^{٢} \leqslant ٣٢$$

$$\therefore (\sqrt{\text{٤أ}+١})^{٢} + (\sqrt{\text{٤ب}+١})^{٢} + (\sqrt{\text{٤ج}+١})^{٢} + (\sqrt{\text{٤د}+١})^{٢} \leqslant ٣٢ \leqslant ٣٦$$

$$\therefore (\sqrt{\text{٤أ}+١}) + (\sqrt{\text{٤ب}+١}) + (\sqrt{\text{٤ج}+١}) + (\sqrt{\text{٤د}+١}) \leqslant \sqrt{٣٢} \leqslant \sqrt{٣٦}$$

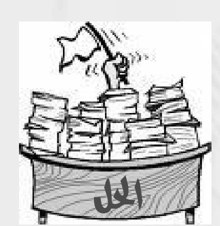
$$\therefore \sqrt{\text{٤أ}+١} + \sqrt{\text{٤ب}+١} + \sqrt{\text{٤ج}+١} + \sqrt{\text{٤د}+١} \leqslant ٦$$



الجدول المجاور يحوي أعداداً من ١ إلى ٢٥ (دون تكرار) ، فإذا كان مجموع الأعداد في كل صف = مجموع الأعداد في كل عمود = مجموع الأعداد في القطرين = ٦٥
فأوجد القيمة العددية للمقدار : س + ص

	٧	٢٥	١٨	
	٢١	١٩	ص	
٢٢	٢٠			٩
١٦			١٠	٢٣
	س	٦	٢٤	

(المصدر – مسابقة المدارس الثانوية – ولاية كارولينا الجنوبية الأمريكية – ١٩ يناير ٢٠٠٢م)



• في العمود الذي يبدأ بالعدد ٧

المربع الخالي = ٦٥ – (٧ + ٢١ + ٢٠ + س)

= ٦٥ – (٤٨ + س)

= ١٧ – س

	٧	٢٥	١٨	
	٢١	١٩	ص	
٢٢	٢٠	١٦–س	س–٢	٩
١٦	١٧–س	س–١	١٠	٢٣
	س	٦	٢٤	

• في الصف الذي يبدأ بالعدد ٢٣

المربع الخالي = ٦٥ – (٢٣ + ١٠ + ١٧ – س + ١٦)

= ٦٥ – (٦٦ – س)

= س – ١

• في العمود الذي يبدأ بالعدد ٢٥

المربع الخالي = ٦٥ – (٢٥ + ١٩ + س – ١ + ٦)

= ٦٥ – (٤٩+ س)

= ١٦ – س

• في الصف الذي يبدأ بالعدد ٩

المربع الخالي = ٦٥ – (٩+ ١٦ – س + ٢٠ + ٢٢)

= ٦٥ – (٦٧ – س)

= س – ٢

• في العمود الذي يبدأ بالعدد ١٨

١٨ + ص + س – ٢ + ١٠ + ٢٤ = ٦٥

∴ س + ص + ٥٠ = ٦٥

∴ س+ ص = ١٥ وهو المطلوب

ومن الممكن الحصول على باقي الأرقام من خلال أن مجموع كل صف أو عمود والأقطار = ٦٥

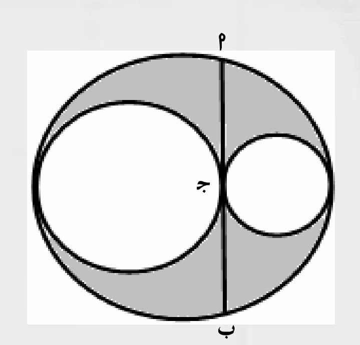
٤	٧	٢٥	١٨	١١
٨	٢١	١٩	١٢	٥
٢٢	٢٠	١٣	١	٩
١٦	١٤	٢	١٠	٢٣
١٥	٣	٦	٢٤	١٧



٦

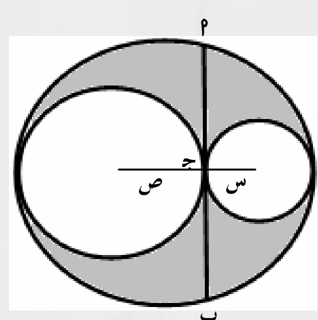
على الشكل المجاور : أ ب وتر في الدائرة الكبرى يمس الدائرتان الداخلتان في نقطة جـ

إذا كان : | أ ب | = ٤ سم . فاحسب مساحة الجزء المظلل



(المصدر – مسابقة المدارس الثانوية – ولاية جورجيا الأمريكية – ٢٠٠٣ م)





نفرض أن طولي نصفي قطري الدائرتان الداخلتان س ، ص

∵ طول قطر الدائرة الكبرى = ٢ س+ ٢ ص

∴ طول نصف قطر الدائرة الكبرى = س+ ص

∵| أ ب| = ٤ سم

∴ | أ جـ| = | جـ ب| = ٢ سم

∴ أ جـ . جـ ب = ٢ × ٢ = ٤ ------------- (١)

∵ جـ نقطة تقاطع أ ب ، قطر الدائرة الكبرى

∴ أ جـ . جـ ب = ٢س . ٢ ص = ٤س ص ------------- (٢)

∴ من (١) ، (٢)

∴ س ص = ١

∵ مساحة الجزء المظلل = مساحة الدائرة الكبرى – مجموع مساحتي الدائرتان الداخلتان

= ط (س + ص)^{٢}– (ط س^{٢} + ط ص^{٢})

= ط (س + ص)^{٢}– ط (س^{٢} + ص^{٢})

= ط ((س + ص)^{٢}– س^{٢} – ص^{٢})

= ط (س^{٢} + ص^{٢}+٢س ص– س^{٢} – ص^{٢})

= ط × ٢س ص

∵ س ص = ١

∴ مساحة الجزء المظلل = ط × ٢ = ٢ط .

٧

إذا كان : س + ص + ع = $\sqrt{٣,٥}$

س^{2} + ص^{2} + ع^{2} = ٦,٥

س ص = ع^{2}

فأوجد قيمة : ع $\sqrt{١٤}$

(المصدر – مسابقة معهد UAB الأمريكي للعلوم الرياضية – للصف الثاني ثانوي – ٢٠٠٥ م)



∵ س^{2} + ص^{2} + ع^{2} = ٦,٥

∴ س^{2} + ص^{2} = ٦,٥ – ع^{2} بإكمال المربع

∴ (س + ص)^{2} – ٢ س ص = ٦,٥ – ع^{2}

∵ س ص = ع^{2}

∴ (س + ص)^{2} – ٢ ع^{2} = ٦,٥ – ع^{2}

∴ (س + ص)^{2} = ٦,٥ + ع^{2} -------------- (١)

∵ س + ص + ع = $\sqrt{٣,٥}$

∴ س + ص = $\sqrt{٣,٥}$ – ع -------------- (٢)

بالتعويض من : (٢) في (١)

∴ ($\sqrt{٣,٥}$ – ع)^{2} = ٦,٥ + ع^{2}

∴ ٣,٥ – ٢ $\sqrt{٣,٥}$ ع + ع^{2} = ٦,٥ + ع^{2}

∴ ٣,٥ – ٢ $\sqrt{٣,٥}$ ع = ٦,٥ + ع^{2} – ع^{2}

∴ ٣,٥ – ٢ $\sqrt{٣,٥}$ ع = ٦,٥

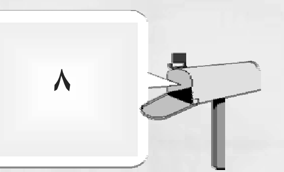
∴ – ٢ $\sqrt{٣,٥}$ ع = ٦,٥ – ٣,٥

∴ – ٢ $\sqrt{٣,٥}$ ع = ٣ بالتربيع

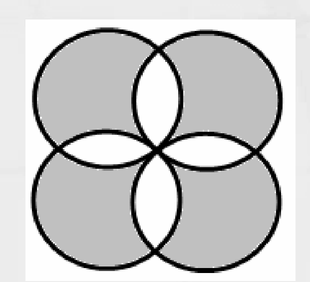
∴ ٤ × ٣,٥ ع^{2} = ٩

∴ ١٤ ع^{2} = ٩ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

∴ ع $\sqrt{١٤}$ = ٣

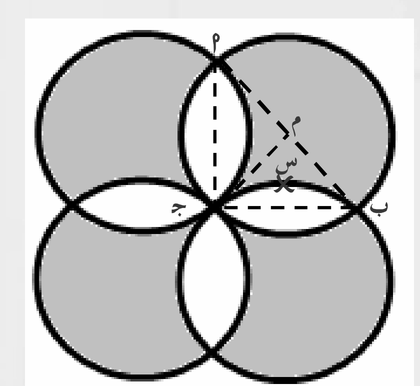



على الشكل المجاور : أربع دوائر متطابقة ،
نصف قطر كل منها ٢ سم . احسب مساحة الجزء المظلل .



(المصدر – الجولة الفردية من مسابقة CSULB الأمريكي للعلوم الرياضية – صيف ٢٠٠٥ م)





نصل القطر أ ب كما نصل كل من : ب ج ، م ج ، أ ج

∵ أ ج ⊥ ب ج

، ∵ |أ م| = |ب م| = |م ج| = ٢ سم

∴ م ج ⊥ أ ب

∴ ∠ ب م ج = ٩٠°

∴ مساحة سطح القطاع م ب ج = $\frac{١}{٢}$ × ٢ × ٢ × ٩٠ × $\frac{ط}{١٨٠}$ = ط سم٢

، ∵ مساحة سطح Δ م ب ج = $\frac{١}{٢}$ × ٢ × ٢ = ٢ سم٢

∴ مساحة القطعة الدائرية ب س ج = ط – ٢ سم٢

<u>في الدائرة م :</u>

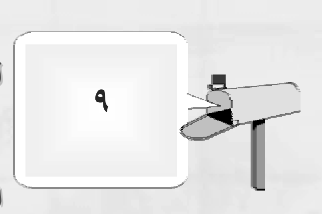
مجموع مساحات القطع الدائرية المطابقة للقطعة الدائرية ب س ج = (ط – ٢) × ٤ = (٤ط –٨) سم٢

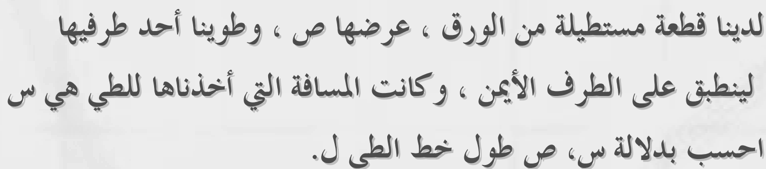
∵ مساحة سطح الدائرة م = ٤ ط سم٢

∴ مساحة سطح الجزء المظلل في الدائرة م = ٤ط – (٤ط –٨)

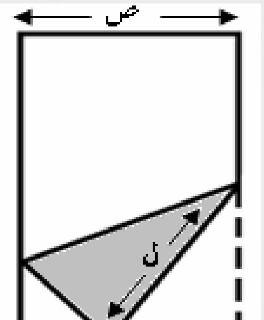
= ٨ سم٢

∴ مساحة سطح الجزء المظلل في الشكل كاملاً = ٨ × ٤ = ٣٢ سم٢.

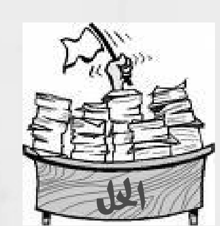


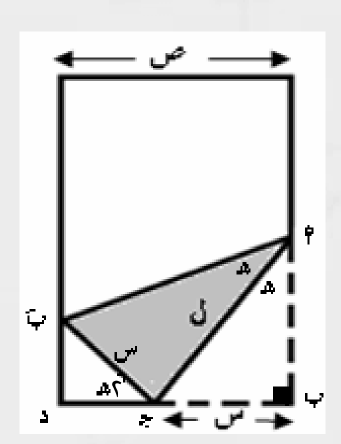


لدينا قطعة مستطيلة من الورق ، عرضها ص ، وطوينا أحد طرفيها لينطبق على الطرف الأيمن ، وكانت المسافة التي أخذناها للطي هي س احسب بدلالة س، ص طول خط الطي ل.



(المصدر – مسابقة المدارس الثانوية – ولاية جورجيا الأمريكية – ٢٠٠٣ م)





(نرمز بالرموز الموضحة بالرسم للنقاط التي سنستخدمها)

نفرض أن : $\angle$ ب أ ج = هـ°

$\therefore$ $\angle$ بَ أ ج = هـ°

في Δ القائم أ ب ج : $\angle$ أ ج ب = ٩٠° − هـ°

في Δ أ ج بَ المطابق لـ Δ أ ج ب : $\angle$ أ ج بَ = ٩٠° − هـ°

$\therefore$ $\angle$ بَ ج د = ١٨٠° − (٩٠° − هـ° + ٩٠° − هـ°)

= ١٨٠° − ١٨٠° + ٢ هـ°

= ٢ هـ°

في Δ أ ب ج القائم في $\angle$ ب : جا هـ = $\frac{\text{س}}{\text{ل}}$

في Δ بَ د ج القائم في $\angle$ د : جتا٢ هـ = $\frac{\text{ص} - \text{س}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} - 1$

$\because$ جتا٢ هـ = ١ − ٢جا² هـ

$\therefore$ $\frac{\text{ص}}{\text{س}} - 1 = 1 - \frac{2\text{س}^2}{\text{ل}^2}$

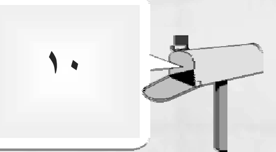
$\therefore$ $\frac{2\text{س}^2}{\text{ل}^2} = 2 - \frac{\text{ص}}{\text{س}}$

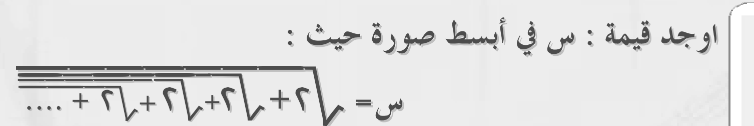
$\therefore$ $\frac{2\text{س}^2}{\text{ل}^2} = \frac{2\text{س} - \text{ص}}{\text{س}}$

$\therefore$ $\text{ل}^2 \times (2\text{س} - \text{ص}) = 2\text{س}^3$

$\therefore$ $\text{ل}^2 = \frac{2\text{س}^3}{2\text{س} - \text{ص}}$

$\therefore$ $\text{ل} = \sqrt{\frac{2\text{س}^3}{2\text{س} - \text{ص}}}$

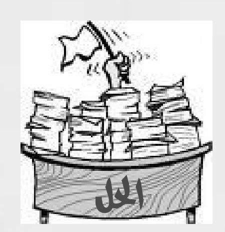




اوجد قيمة : س في أبسط صورة حيث :

$$س = \sqrt{٢ + \sqrt{٢ + \sqrt{٢ + \sqrt{٢ + ...}}}}$$

(المصدر – الدوري العام للرياضيات بين المدارس الثانوية – مدينة وسيكنسون الأمريكية – ٣١ مارس ٢٠٠٤م)



$\therefore$ $س = \sqrt{٢ + \sqrt{٢ + \sqrt{٢ + \sqrt{٢ + ...}}}}$

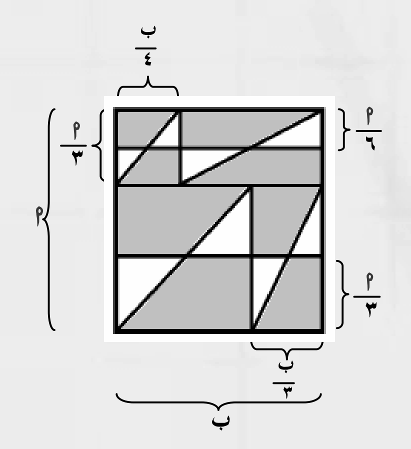
$\therefore$ $س = \sqrt{٢ + س}$ بالتربيع

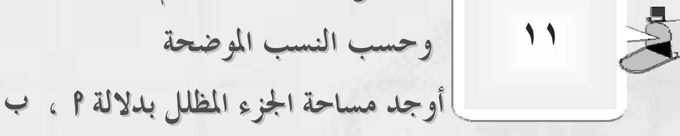
$\therefore$ $س^{٢} = ٢ + س$

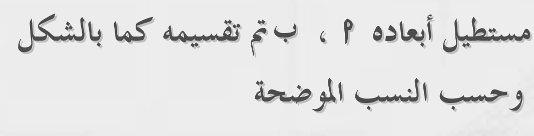
$\therefore$ $س^{٢} - س - ٢ = ٠$

$\therefore$ $(س - ٢)(س + ١) = ٠$

$\therefore$ $س = ٢$ أو $س = -١$ (مرفوض)





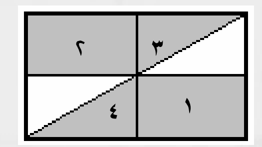


مستطيل أبعاده أ ، ب تم تقسيمه كما بالشكل
وحسب النسب الموضحة
أوجد مساحة الجزء المظلل بدلالة أ ، ب

(المصدر – بطولة مدارس مدينة ستانفورد الأمريكية – يوم الهندسة – ٢٠٠٠م)

$\frac{ب}{٣}$





ملاحظة

عند رسم محوري تناظر مستطيل وأحد قطريه (كما بالشكل)

فإن سطح المساحة (١) + سطح المساحة (٢)= $\frac{١}{٢}$ مساحة سطح المستطيل الأصلي

، سطح المساحة (٣) + سطح المساحة (٤)= $\left(\frac{١}{٨}+\frac{١}{٨}\right)$ مساحة سطح المستطيل الأصلي

= $\frac{١}{٤}$ مساحة سطح المستطيل الأصلي

وعليه فإن مساحة سطح الجزء المظلل في المستطيل الأصلي = $\left(\frac{١}{٢}+\frac{١}{٤}\right)$ مساحة سطح المستطيل الأصلي

= $\frac{٣}{٤}$ مساحة سطح المستطيل الأصلي

فإذا فرضنا أن بعدي المستطيل الأصلي س، ص فتكون مساحة الجزء المظلل به = $\frac{٣}{٤}$س ص

وبالعودة للمشكلة الأصلية

نلاحظ أن لدينا ٤ حالات تماثل ما تحدثنا عنه في الملاحظة السابقة وتكون :

مجموع مساحات الأسطح المظللة بها = ($\frac{٣}{٤} \times \frac{ب}{٤} \times \frac{أ}{٣}$)+($\frac{٣}{٤} \times \frac{٢}{٣}$أ $\times \frac{٢}{٣}$ب)+($\frac{٣}{٤} \times \frac{ب}{٣} \times \frac{٢}{٣}$أ) +($\frac{٣}{٤} \times \frac{٣}{٤}$ب $\times \frac{١}{٣}$أ)

= $\frac{١}{١٦}$ أ ب + $\frac{١}{٣}$ أ ب + $\frac{١}{٦}$ أ ب + $\frac{٣}{١٦}$ أ ب

= $\frac{٤}{١٦}$ أ ب + $\frac{٣}{٦}$ أ ب

= $\frac{١}{٤}$ أ ب + $\frac{١}{٢}$ أ ب

= $\frac{٣}{٤}$ أ ب

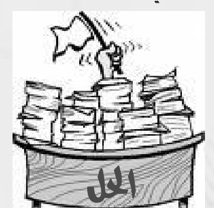
١٢

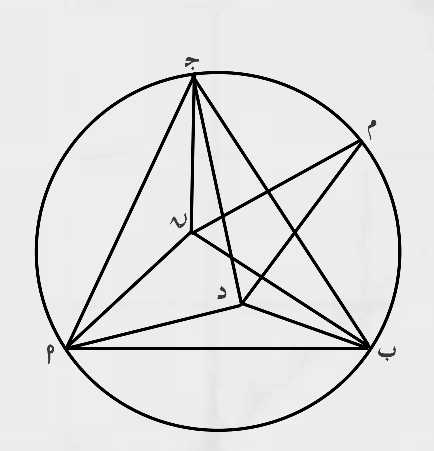
ا ب جـ مثلث مركزه ن ، إذا كانت د نقطة داخله وتحقق العلاقة :-

∠ ا ب د + ∠ ا جـ د = ∠ جـ ب د + ∠ ب جـ د

تحقق من أن العلاقة السابقة تتحقق إذا وفقط إذا كانت النقطة ن تنطبق على النقطة د .

(المصدر – الأولمبياد الوطني رقم ٤٧ لجمهورية سلوفينيا –٢٠٠٦ م)





نرسم دائرة تمر برؤوس △ ا ب جـ

ونفرض أن : قياس ∠ ا = س ، قياس∠ ب = ص ، قياس ∠ جـ = ع

∴ ∠ د ب ا + ∠ د ب جـ + ∠ د جـ ب + ∠ د جـ ا = ص + ع

∵ ن مركز △ ا ب جـ وبفرض أن : د تنطبق على ن

∴ من الممكن إثبات المطلوب إذا تم إثبات أن :-

∠ د ب جـ + ∠ د جـ ب = $\frac{ص + ع}{٢}$ ---------------- (١)

∵ س + ص + ع = ١٨٠°

∴ ص + ع = ١٨٠° – س ---------------- (٢)

في △ د ب جـ

∵ ∠ د ب جـ + ∠ د جـ ب = ١٨٠° - ∠ ب د جـ ---------------- (٣)

∴ من (٢) ، (٣) في (١)

∴ المطلوب إثبات أن : ١٨٠° - ∠ ب د جـ = $\frac{١٨٠ – س}{٢}$ = ٩٠° - $\frac{س}{٢}$

∴ ∠ ب د جـ = ٩٠° + $\frac{س}{٢}$ ---------------- (٤)

على الجانب الآخر: ∵ ن مركز المثلث

∴ ∠ ب ن جـ = ١٨٠° - $\left(\frac{ص + ع}{٢}\right)$

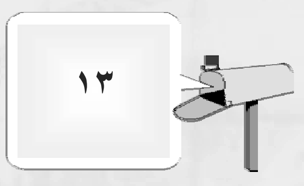
= ١٨٠° - $\left(\frac{١٨٠ – س}{٢}\right)$

= ١٨٠° - (٩٠° - $\frac{س}{٢}$) = ١٨٠° –٩٠° + $\frac{س}{٢}$

∴ ∠ ب ن جـ = ٩٠° + $\frac{س}{٢}$ ---------------- (٥)

، ∵ النقط ن ، د تقع على اتجاه واحد من ب جـ

∴ لا تتحقق العلاقات (٤)، (٥) إلا إذا وفقط إذا كان : د تنطبق على ن .



أوجد مجموعة حل النظام
$$\begin{cases} \frac{٩}{٤\,س} + \frac{٧}{٤\,ص} = ٢س^٢ + ٢ص^٢ \\ \frac{٩}{٤\,س} - \frac{٧}{٤\,ص} = -س^٢ + ص^٢ \end{cases}$$
في ح .

(المصدر – بطولة مدارس مدينة فيرمونت الأمريكية رقم ٤٧ للمرحلتين المتوسطة والثانوية)



$\frac{٩}{٤\,س} + \frac{٧}{٤\,ص} = ٢س^٢ + ٢ص^٢$ ---------------- (١)

$\frac{٩}{٤\,س} - \frac{٧}{٤\,ص} = -س^٢ + ص^٢$ ---------------- (٢)

بجمع (١) ، (٢)

$\frac{٩}{٢\,س} = س^٢ + ٣ص^٢$ بالضرب × س

$\frac{٩}{٢} = س^٣ + ٣\,س\,ص^٢$ ---------------- (٣)

بطرح (١) من(٢)

$\frac{٧}{٢\,ص} = ٣\,س^٢ + ص^٢$ بالضرب × ص

$\frac{٧}{٢} = ٣\,ص\,س^٢ + ص^٣$ ---------------- (٤)

بجمع (٣) ،(٤)

$\therefore س^٣ + ٣\,س\,ص^٢ + ٣\,ص\,س^٢ + ص^٣ = ٨$

$\because (س + ص)^٣ = س^٣ + ٣\,س\,ص^٢ + ٣\,ص\,س^٢ + ص^٣$

$\therefore (س + ص)^٣ = ٢^٣$

$\therefore س + ص = ٢$ ---------------- (٥)

بطرح (٤) من (٣)

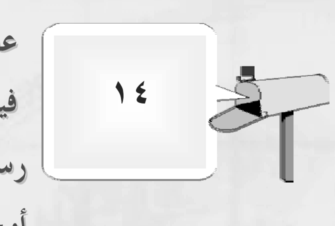
$\therefore س^٣ + ٣\,س\,ص^٢ - ٣\,ص\,س^٢ - ص^٣ = ١$

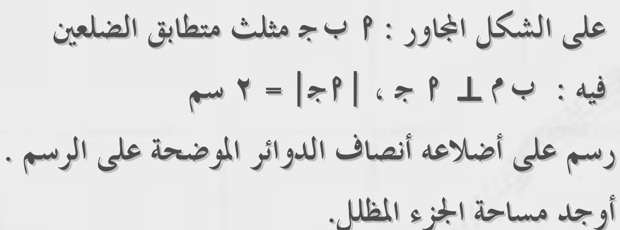
$\therefore (س - ص)^٣ = ١^٣$

$\therefore س - ص = ١$ ---------------- (٦)

من (٥) ، (٦)

$(س ، ص) = \left(\frac{٣}{٢}، \frac{١}{٢}\right)$



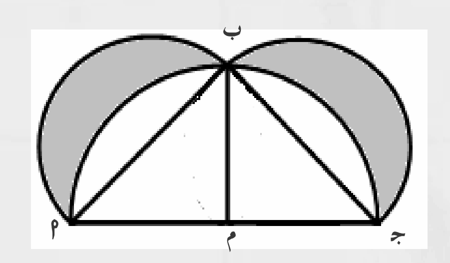


على الشكل المجاور : ٢ ب جـ مثلث متطابق الضلعين

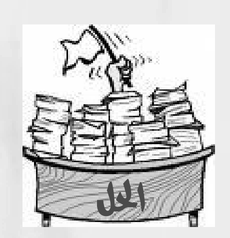
فيه : ب م ⊥ ٢ جـ ، |٢جـ| = ٢ سم

رسم على أضلاعه أنصاف الدوائر الموضحة على الرسم .

أوجد مساحة الجزء المظلل.



(المصدر – مسابقة المدارس الثانوية – ولاية جورجيا الأمريكية – ٢٠٠٥ م)



∵ ب م ⊥ ٢ جـ في المثلث ٢ ب جـ المتطابق الضلعين

∴ م مركز نصف الدائرة الكبرى.

∴ |ب م| = |٢ م| = ١

∴ |٢ ب| = $\sqrt{٢}$

∴ مساحة نصف الدائرة الكبرى = $\frac{١}{٢}$ × ط × $١^{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ ط سم^{٢} ------------------١

∵ نصف مساحة سطح الدائرة اليمنى = $\frac{١}{٢}$ × ط × ($\frac{١}{٢}\sqrt{٢}$)^{٢} = $\frac{١}{٤}$ ط سم^{٢} ------------ ٢

من (١) ،(٢)

∴ مساحة سطح نصف الدائرة الكبرى = ضعف مساحة سطح نصف الدائرة اليمنى .

∵ م ب يقسم مساحة سطح △ ٢ ب جـ إلى سطحين متطابقين في المساحة .

∴ نصف مساحة سطح الدائرة اليمنى = $\frac{١}{٤}$ مساحة سطح الدائرة الكبرى

بحذف مساحة سطح المنطقة الدائرية المشتركة بين نصف الدائرة اليمنى ، وربع الدائرة الكبرى .

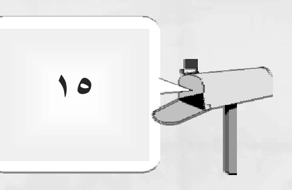
∴ مساحة سطح △ ٢ م ب = مساحة الجزء المظلل الأيمن

وعلى ذلك :

مساحة سطح △ ٢ ب جـ = مجموع مساحتي الجزأين المظللين الأيمن والأيسر .

∵ مساحة سطح △ ٢ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٢ × ١ = ١ سم^{٢}

∴ مجموع مساحتي الجزأين المظللين الأيمن والأيسر = ١ سم^{٢}



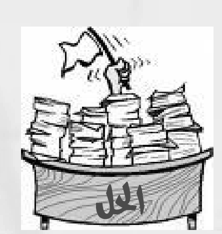
ﻢ ب ﺟ د شبه منحرف فيه ﻢ ب // ﺟ د ، م نقطة تقاطع قطريه

| ﻢ ب | = ٨سم، | ﺟ د | = ٣٢ سم،

رسم المربع م هـ ن و على قاعدته ﺟ د

احسب ارتفاع شبه المنحرف ﻢ ب ﺟ د .

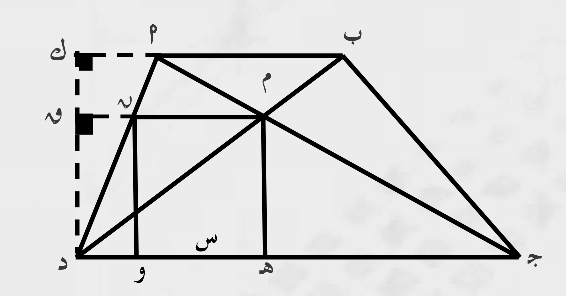
[المصدر-مسابقة مدارس ARML الأمريكية - ٢٠٠٥ م)



نرسم د ك ارتفاعاً للمثلث ﻢ ب ﺟ يقطع $\overleftarrow{\text{ب ﻢ}}$ في ك

نرسم د ق ارتفاعاً للمثلث ن م د يقطع $\overleftarrow{\text{م ن}}$ في ق

نفرض أن طول ضلع المربع س



∵ ﻢ ب // م ن

∴ ∆ ﻢ ب د يشابه ∆ ن م د

، نسبة التشابه = $\frac{٨}{س}$

∵ النسبة بين ارتفاعي المثلثين المتشابهين = نسبة التشابه

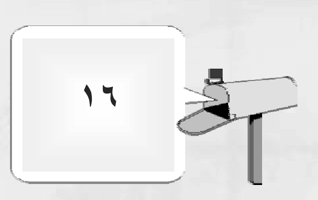
∴ $\frac{دك}{دق} = \frac{٨}{س}$

∵ د ق = ن و = س

∴ $\frac{دك}{س} = \frac{٨}{س}$

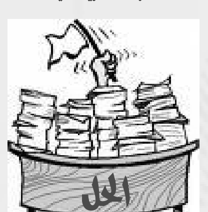
∴ د ك = ٨ سم

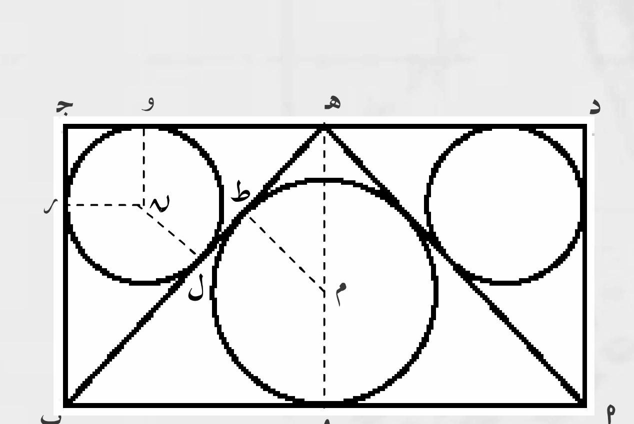
∴ ارتفاع شبه المنحرف ﻢ ب ﺟ د = ٨ سم .



على الشكل المجاور : أ ب ج د مستطيل
فيه هـ منتصف ج د ، رسمت دائرتان متطابقتان نصف
قطر كل منهما ٣سم داخل Δ Δ ب ج هـ ، أ د هـ
ورسمت دائرة نصف قطرها ٤ سم داخل Δ أ ب هـ .
احسب أطوال أبعاد المستطيل أ ب ج د .

(المصدر – بطولة كندا المفتوحة للرياضيات – ٢٢ نوفمبر ٢٠٠٦ م)





نفرض م مركز الدائرة الكبرى ، ن مركز للدائرة الصغرى

نرسم $\overleftarrow{\text{هـ م}}$ يقطع أ ب في ى

نرسم م ط ، ن ل ، ن ر ، ن و

نفرض أن : ب ج = ص

نفرض أن : ج هـ = س ومنها ج د = ٢ س

∵ م ط = م ى = ٤ سم

، ∵ هـ ى = ب ج = ص

∴ هـ م = ص − ٤

∵ ب ى = ب ط = س (مماسان للدائرة م من نقطة ب التي تقع خارج الدائرة)

∵ ن ر = ن و = ٣ سم

، ∵ ن و ⊥ ج د ، ن ر ⊥ ب ج ، ∠ ج قائمة .

∴ الشكل و ن ر ج مربع ومنها ر ج = و ج = ٣ سم

∴ ر ب = ص − ٣ ، و هـ = س − ٣

ولكن : و هـ = ل هـ = س − ٣ وكذلك : ر ب = ل ب = ص − ٣

والآن :

∵ هـ ط = هـ ب – ط ب = (هـ ل + ل ب) – ط ب

= ((ص − ٣) + (س − ٣)) – ب ى .

= ((ص − ٣) + (س − ٣)) – س .

= ص − ٣+ س − ٣ – س .

= ص − ٦



في Δ هـ م ط القائم في زاوية ط

$|م هـ|^2 = |م ط|^2 + |ط هـ|^2$

$(ص - ٤)^2 = (٤)^2 + (ص - ٦)^2$

$ص^2 - ٨ ص + ١٦ = ١٦ + ص^2 - ١٢ ص + ٣٦$

∴ ٤ ص = ٣٦ ⇐⇐⇐⇐ ص = ٩

∴ هـ ط = ٩ − ٦ = ٣

∴ ظا م ط هـ = $\frac{٤}{٣}$

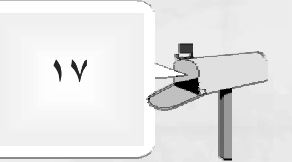
ولكن ∠ م ط هـ = ∠ ب هـ و

∴ ∠ ب هـ و = $\frac{س}{ص} = \frac{س}{٩} = \frac{٤}{٣}$

∴ ٣ س = ٣٦

∴ س = ١٢

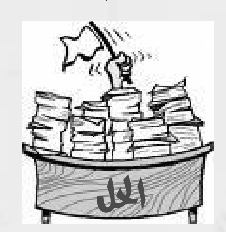
∴ أبعاد المستطيل : ١٢ ، ٩ سم.



أوجد جميع الحلول الحقيقية للمعادلة :

$١ + س + س^٢ + س^٣ = س^٤ + س^٥$

(المصدر – مسابقة W.JBLUNDON رقم ٢١ برعاية هيئة الرياضيات الكندية – ١٨ فبراير ٢٠٠٤ م)



∴ $س^٥ + س^٤ = ١ + س + س^٢ + س^٣$

∴ $س^٥ + س^٤ - س^٣ - س^٢ - س - ١ = ٠$

∴ $(س^٥ - س^٣ - س) + (س^٤ - س^٢ - ١) = ٠$

∴ $س(س^٤ - س^٢ - ١) + (س^٤ - س^٢ - ١) = ٠$

∴ $(س^٤ - س^٢ - ١)(س + ١) = ٠$

∴ $س + ١ = ٠$

∴ $س = -١$

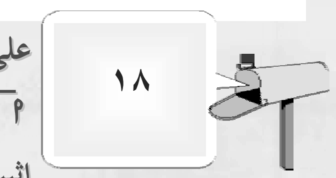
أو : $س^٤ - س^٢ - ١ = ٠$

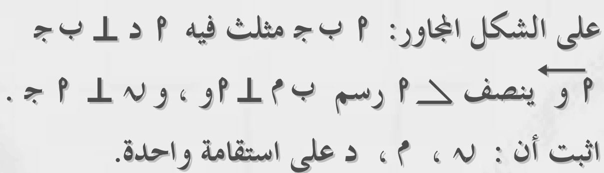
نستخدم القانون العام لحل المعادلة السابقة:

$$س^٢ = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢ أ} = \frac{١ \pm \sqrt{١ - ٤ \times ١ \times -١}}{٢} = \frac{١ \pm \sqrt{٥}}{٢}$$

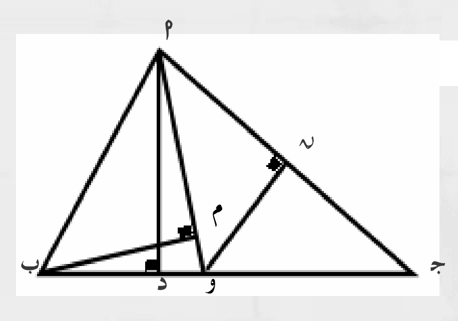
∴ $س = \pm \sqrt{\frac{١ \pm \sqrt{٥}}{٢}}$

∴ مجموعة حل المعادلة = $\{-١ ، \sqrt{\frac{١ \pm \sqrt{٥}}{٢}} ، -\sqrt{\frac{١ \pm \sqrt{٥}}{٢}}\}$.



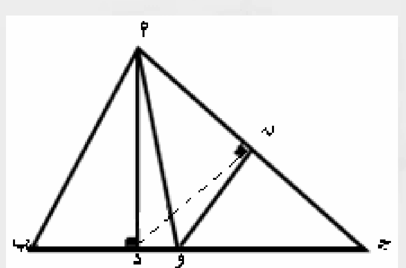
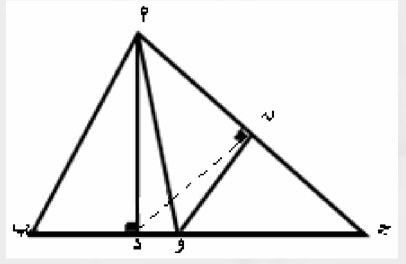


على الشكل المجاور: ٩ ب جـ مثلث فيه ٩ د ⊥ ب جـ
٩و ينصف ∠ ٩ رسم ب م ⊥ ٩و ، و ن ⊥ ٩ جـ .
اثبت أن : ن ، م ، د على استقامة واحدة.



(المصدر – الدوري العام للرياضيات بين المدارس الثانوية – مدينة وسيكنسون الأمريكية التصفية الرابعة–١٩٩٥/٩٤م)



في الشكل الرباعي ٩ ن و د

∵ ∠ ٩ ن و + ∠ ٩ د و = ١٨٠° (متقابلتان متكاملتان)

∴ الشكل ٩ ن و د رباعي دائري

∴ ∠ ن د و = ∠ ن ٩و (مرسومتان على قاعدة واحدة ٩ ب وفي جهة واحدة منها)

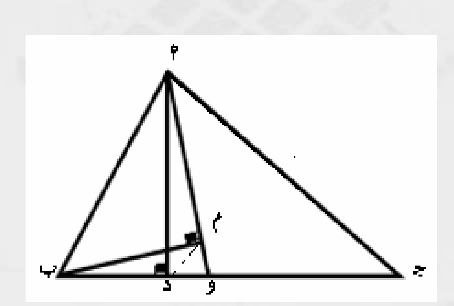
∵ ∠ ن ٩و = $\frac{1}{2}$ ∠ ٩

∴ ∠ ن د و = $\frac{1}{2}$ ∠ ٩ ---------------- ١

في الشكل الرباعي ٩ م د ب .

∵ ∠ ٩ م ب = ∠ ٩ د ب = ٩٠° (مرسومتان على قاعدة واحدة ٩ ب وفي جهة واحدة منها)

∴ الشكل ٩ م د ب رباعي دائري



∴ ∠ م ٩ ب + ∠ م د ب = ١٨٠° (خواص الرباعي الدائري) ----- ٢

ولكن : ∠ م د ب + ∠ م د و = ١٨٠° (زاوية مستقيمة) ----- ٣

∴ من (١) ، (٢)

∴ ∠ م ٩ ب = ∠ م د و.

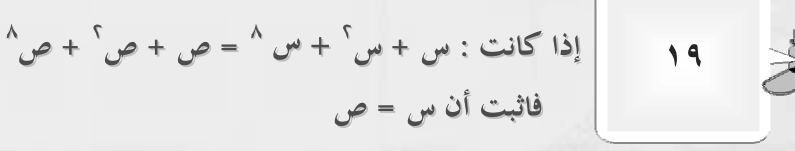
∵ و ٩ ينصف ∠ ٩

∴ ∠ م د و = $\frac{1}{2}$ ∠ ٩ ----- ٤

∴ من (١) ، (٤)

∴ ∠ ن د و = ∠ م د و

∴ ن ، م ، د على استقامة واحدة.



١٩

إذا كانت : $س + س^{٢} + س^{٨} = ص + ص^{٢} + ص^{٨}$

فاثبت أن $س = ص$

(المصدر – الدوري العام للرياضيات بين المدارس الثانوية – مدينة وسيكنسون الأمريكية – التصفية الثانية – نوفمبر ١٩٩٦م)



$\therefore\ س^{٨} - ص^{٨} = (س^{٤} - ص^{٤})(س^{٤} + ص^{٤})$

$= (س^{٢} - ص^{٢})(س^{٢} + ص^{٢})(س^{٤} + ص^{٤})$

$= (س - ص)(س + ص)(س^{٢} + ص^{٢})(س^{٤} + ص^{٤})$.

$\because\ س + س^{٢} + س^{٨} = ص + ص^{٢} + ص^{٨}$

$\therefore\ س + س^{٢} + س^{٨} - ص - ص^{٢} - ص^{٨} = ٠$

$\therefore\ (س - ص) + (س^{٢} - ص^{٢}) + (س^{٨} - ص^{٨}) = ٠$

$\therefore\ (س - ص) + (س - ص)(س + ص) + (س - ص)(س + ص)(س^{٢} + ص^{٢})(س^{٤} + ص^{٤}) = ٠$

$\therefore\ (س - ص)\ [\,١ + (س + ص) + (س + ص)(س^{٢} + ص^{٢})(س^{٤} + ص^{٤})\,] = ٠$

$\therefore$ إما : $س - ص = ٠$ ومنها: $س = ص$

أو : $١ + (س + ص) + (س + ص)(س^{٢} + ص^{٢})(س^{٤} + ص^{٤}) = ٠$

ومنها : $(س + ص) + (س + ص)(س^{٢} + ص^{٢})(س^{٤} + ص^{٤}) = -١$

$\therefore\ (س + ص)\ [\,١ + (س^{٢} + ص^{٢})(س^{٤} + ص^{٤})\,] = -١$

من الواضح أن المقدار : $١ + (س^{٢} + ص^{٢})(س^{٤} + ص^{٤})$ مقداراً موجباً

$\therefore\ ١ + (س^{٢} + ص^{٢})(س^{٤} + ص^{٤}) = ١$

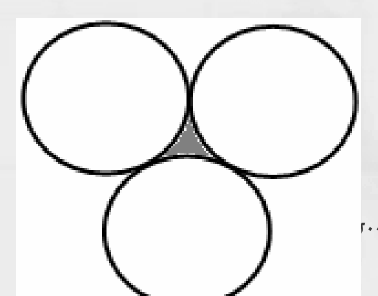
$\therefore\ (س^{٢} + ص^{٢})(س^{٤} + ص^{٤}) = ١ - ١$

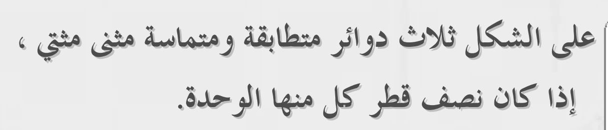
$\therefore\ (س^{٢} + ص^{٢})(س^{٤} + ص^{٤}) = ٠$

وهذا يقتضي أن : $س = ص = ٠$

ومنها $س = ص$.

٢٠





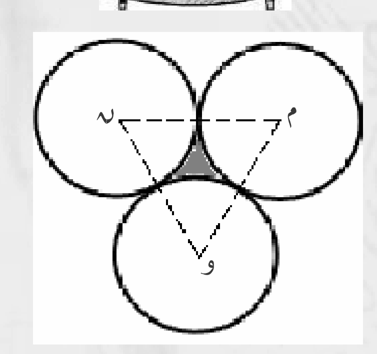
على الشكل ثلاث دوائر متطابقة ومتماسة مثنى مثني ،

إذا كان نصف قطر كل منها الوحدة.

فأوجد مساحة الجزء المظلل .

(المصدر – بطولة مدارس مدينة ستانفورد الأمريكية – يوم الهندسة – ٢٠٠٠)





نصل مراكز الدوائر الثلاثة .

∴ △ م ن و مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه ٢ وحدة

∴ مساحة سطح △ م ن و = $\frac{١}{٢}$ (٢ × ٢ × جا ٦٠) = $\sqrt{٣}$ وحدة مربعة

∵ مساحة سطح △ م ن و = مجموع مساحة ثلاث قطاعات دائرية متطابقة

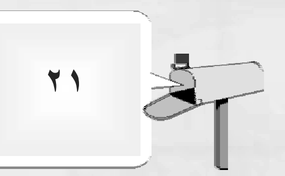
\+ مساحة الجزء المظلل.

∵ مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} هـ ٔ

= $\frac{١}{٢}$ × ١ × ١ × $\frac{٦٠ \times ط}{١٨٠}$ = $\frac{ط}{٦}$ وحدة مربعة.

∴ مساحة سطح القطاعات الثلاثة = $\frac{ط}{٦}$ × ٣ = $\frac{ط}{٢}$ وحدة مربعة

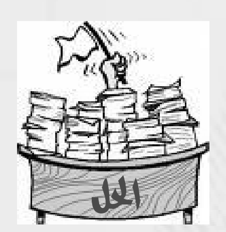
∴ مساحة الجزء المظلل = $\sqrt{٣}$ − $\frac{ط}{٢}$ وحدة مربعة.



ستخبرك آلتك الحاسبة أن قيمة المقدار : $\sqrt[3]{٦\sqrt{٣}+١٠} - \sqrt[3]{٦\sqrt{٣}-١٠}$

تقريباً تساوي٢ . فاثبت حسابياً أن قيمة المقدار السابق = ٢ بالضبط

(المصدر – الدوري العام للرياضيات بين المدارس الثانوية – مدينة وسيكنسون الأمريكية – التصفية الخامسة – ٩٦ /١٩٩٧م)



نفرض أن : $س = \sqrt[3]{٦\sqrt{٣}+١٠}$ ، $ص = \sqrt[3]{٦\sqrt{٣}-١٠}$

∴ $س^{٣} = ٦\sqrt{٣} + ١٠$ ، $ص^{٣} = ٦\sqrt{٣} - ١٠$

ومنها : $س^{٣} - ص^{٣} = ٦\sqrt{٣} + ١٠ - ٦\sqrt{٣} + ١٠ = ٢٠$

وكذلك : $س ص = \sqrt[3]{٦\sqrt{٣}+١٠} \times \sqrt[3]{٦\sqrt{٣}-١٠} = \sqrt[3]{١٠٨-١٠٠} = \sqrt[3]{٨} = ٢$

∴ $(س - ص)^{٣} = س^{٣} - ص^{٣} - ٣ س^{٢}ص + ٣ س ص^{٢}$

$= س^{٣} - ص^{٣} - ٣ س ص (س - ص)$

$= ٢٠ - ٦(س - ص)$

$(س - ص)^{٣} + ٦(س - ص) - ٢٠ = ٠$

نفرض أن : $(س - ص) = م$

∴ $م^{٣} + ٦م - ٢٠ = ٠$

∴ $م^{٣} + ٦م - ٨ - ١٢ = ٠$

∴ $(م^{٣} - ٨) + (٦م - ١٢) = ٠$

∴ $(م^{٣} - ٨) + ٦(م - ٢) = ٠$

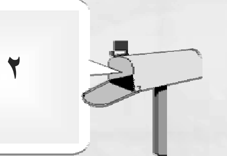
∴ $(م - ٢)(م^{٢} + ٢م + ٤) + ٦(م - ٢) = ٠$

∴ $(م - ٢) [(م^{٢} + ٢م + ٤) + ٦] = ٠$

∴ $(م - ٢) (م^{٢} + ٢م + ١٠) = ٠$

إما : $م - ٢ = ٠$ ومنها $م = ٢$

∴ أو : $(م^{٢} + ٢م + ١٠) = ٠$ (المقدار ليس له حل في ح)



٢٢

إذا كان س ، ص أعداد حقيقية غير سالبة ، أثبت أن .

$$٤ (س^{٩} + ص^{٩}) \geqslant (س^{٢} + ص^{٢}) (س^{٣} + ص^{٣})(س^{٤} + ص^{٤})$$

(المصدر – الدوري العام للرياضيات بين المدارس الثانوية – مدينة وسيكنسون الأمريكية – التصفية الرابعة – يناير ٢٠٠٥م)



∵ س ، ص أعداد حقيقية غير سالبة

∴ نفرض أن $س \geqslant ص \geqslant ٠$

، نفرض أن : ﻫ ، ب أعداد صحيحة موجبة .

∴ $س^{ﻫ} \geqslant ص^{ﻫ}$ ، $س^{ب} \geqslant ص^{ب}$

∴ $(س^{ﻫ} - ص^{ﻫ}) \geqslant ٠$ ، $(س^{ب} - ص^{ب}) \geqslant ٠$

∴ $(س^{ﻫ} - ص^{ﻫ})(س^{ب} - ص^{ب}) \geqslant ٠$

∴ $س^{ﻫ+ب} - س^{ﻫ} ص^{ب} - س^{ب} ص^{ﻫ} + ص^{ﻫ+ب} \geqslant ٠$

∴ $س^{ﻫ+ب} + ص^{ﻫ+ب} \geqslant س^{ﻫ} ص^{ب} + س^{ب} ص^{ﻫ}$

بإضافة المقدار : $س^{ﻫ+ب} + ص^{ﻫ+ب}$ للطرفين

∴ $٢(س^{ﻫ+ب} + ص^{ﻫ+ب}) \geqslant س^{ﻫ} ص^{ب} + س^{ب} ص^{ﻫ} + س^{ﻫ+ب} + ص^{ﻫ+ب}$

∴ $٢(س^{ﻫ+ب} + ص^{ﻫ+ب}) \geqslant (س^{ﻫ} + ص^{ﻫ})(س^{ب} + ص^{ب})$

عندما : ﻫ = ٢ ، ب = ٣

∴ $٢(س^{٥} + ص^{٥}) \geqslant (س^{٢} + ص^{٢})(س^{٣} + ص^{٣})$ ---------------------- ١

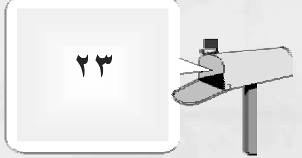
عندما : ﻫ = ٥ ، ب = ٤

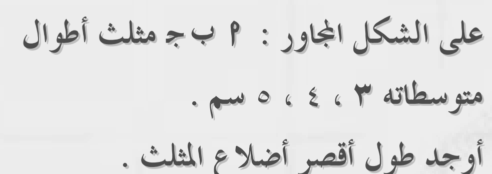
∴ $٢(س^{٩} + ص^{٩}) \geqslant (س^{٥} + ص^{٥})(س^{٤} + ص^{٤})$ بالضرب × ٢

∴ $٤(س^{٩} + ص^{٩}) \geqslant ٢(س^{٥} + ص^{٥})(س^{٤} + ص^{٤})$ ---------------------- ٢

من (١) ، (٢)

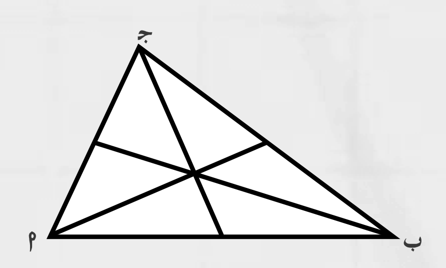
∴ $٤(س^{٩} + ص^{٩}) \geqslant ٢(س^{٢} + ص^{٢})(س^{٣} + ص^{٣})(س^{٤} + ص^{٤})$.



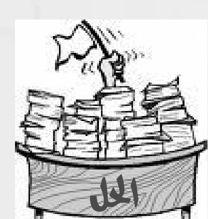


على الشكل المجاور : أ ب ج مثلث أطوال متوسطاته ٣ ، ٤ ، ٥ سم .

أوجد طول أقصر أضلاع المثلث .



(المصدر – مسابقة المدارس الثانوية – ولاية جورجيا الأمريكية – ٢٦ أكتوبر ٢٠٠٢ م)

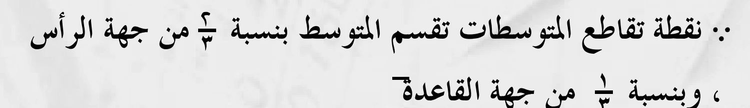


ج

أ ب

نفرض أن أطوال المثلث أ ب ج هي : س ، ص ، ع

وأطوال المتوسطات : $م_س$ ، $م_ص$ ، $م_ع$



∴ نقطة تقاطع المتوسطات تقسم المتوسط بنسبة $\frac{٢}{٣}$ من جهة الرأس

، وبنسبة $\frac{١}{٣}$ من جهة القاعدة

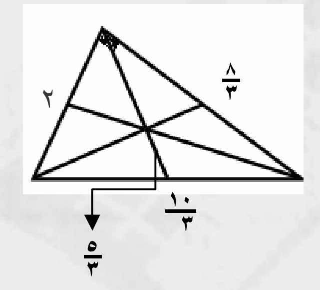
∴ أطوال أضلاع المثلث المظلل = $\frac{٢}{٣}$ $م_س$ ، $\frac{٢}{٣}$ $م_ص$ ، $\frac{٢}{٣}$ $م_ع$

∴ أطوال أضلاع المثلث المظلل = ($\frac{٢}{٣}$ × ٣) ، ($\frac{٢}{٣}$ × ٤) ، ($\frac{٢}{٣}$ × ٥)

∴ أطوال أضلاع المثلث المظلل = ٢ ، $\frac{٨}{٣}$ ، $\frac{١٠}{٣}$

∵ $(٢)^2 + (\frac{٨}{٣})^2 = (\frac{١٠}{٣})^2$

∴ أطوال أضلاع المثلث المظلل هي أطوال مثلث قائم .



∴ المتوسط الخارج من رأس قائمة المثلث المظلل = $\frac{١}{٢} \times \frac{١٠}{٣} = \frac{٥}{٣}$

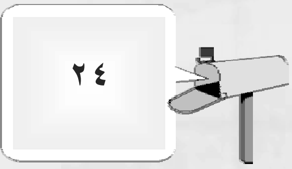
، المتوسط الثاني = $\sqrt{١ + \frac{٦٤}{٩}} = \sqrt{\frac{٧٣}{٩}} = \frac{١}{٣}\sqrt{٧٣}$

، المتوسط الثالث = $\sqrt{٤ + \frac{١٦}{٩}} = \sqrt{\frac{٥٢}{٩}} = \frac{١}{٣}\sqrt{٥٢}$

∵ متوسطات المثلث المظلل = $\frac{١}{٢}$س ، $\frac{١}{٢}$ص ، $\frac{١}{٢}$ع

∴ أطوال أضلاع المثلث أ ب ج (س ، ص ، ع) = ($\frac{١٠}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}\sqrt{٧٣}$ ، $\frac{٢}{٣}\sqrt{٥٢}$)

∴ طول الضلع الأصغر = $\frac{١٠}{٣}$



أوجد : $\sqrt{س^{٢} - ص^{٢}}$ إذا كانت س ، ص تحقق النظام :

$$\begin{cases} س + ص + \sqrt{س + ص} = ٧٢ \\ س - ص + \sqrt{س - ص} = ٣٠ \end{cases}$$

(المصدر – مسابقة المدارس الثانوية – ولاية جورجيا الأمريكية – ٢٠٠٣م)



$\because$ $س + ص + \sqrt{س + ص} = ٧٢$

$\therefore$ $س + ص + \sqrt{س + ص} - ٧٢ = ٠$

$\therefore$ $(س + ص) + (\sqrt{س + ص}) - ٧٢ = ٠$ بالتحليل

$\therefore$ $(\sqrt{س + ص} - ٨)(\sqrt{س + ص} + ٩) = ٠$

$\therefore$ $\sqrt{س + ص} = ٨$ أو $\sqrt{س + ص} = -٩$ (مرفوض)

بالمثل :

$س - ص - \sqrt{س - ص} - ٣٠ = ٠$

$\therefore$ $(س - ص) - (\sqrt{س - ص}) - ٣٠ = ٠$ بالتحليل

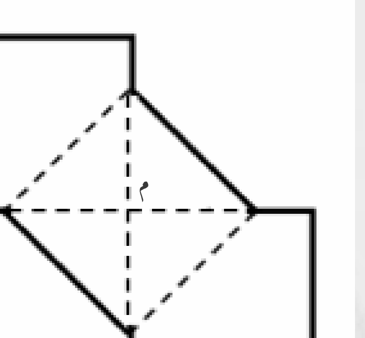
$\therefore$ $(\sqrt{س - ص} - ٦)(\sqrt{س - ص} + ٥) = ٠$

$\therefore$ $\sqrt{س - ص} = ٦$ أو $\sqrt{س - ص} = -٥$ (مرفوض)

$\therefore$ $\sqrt{س + ص} \times \sqrt{س - ص} = ٦ \times ٨$

$\therefore$ $\sqrt{(س + ص)(س - ص)} = ٤٨$

$\therefore$ $\sqrt{س^{٢} - ص^{٢}} = ٤٨$



٢٥

على الشكل المجاور :

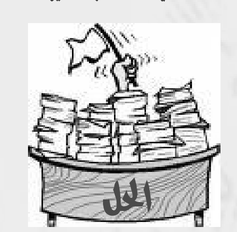
ثلاث مربعات متطابقة طول ضلعها ٣ سم ،

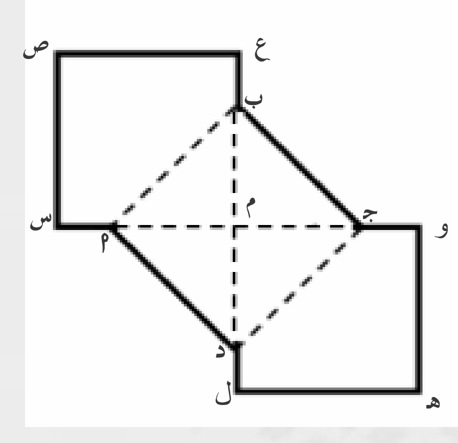
يلتقي مربعان عند رأس مشتركة (م) التي هي

مركز تناظر المربع الأوسط .

أوجد محيط الشكل الخارجي .

(المصدر – المسابقات الكندية – مسابقة فيرمات – ٢٠ فبراير ٢٠٠٧ م))





∵ المربعات متطابقة .

∴ س ص = ص ع = ب جـ = و هـ = هـ ل = ٩ د = ٣ سم

∴ محيط الشكل المطلوب = (٣ × ٦) + ٩ س + د ل + و جـ + ب ع

∵ م مركز المربع ٩ ب جـ د

∴ ٩ م = ب م = جـ م = د م ---------------- (١)

، ∵ س م = ع م = و م = ل م ---------------- (٢)

من (١) ، (٢) بالطرح

∴ ٩ س = ب ع = و جـ = د ل

∴ محيط الشكل المطلوب = (٣ × ٦) + ٤ ٩ س = ١٨ + ٤ ٩ س

في المربع ٩ ب جـ د الذي يحوي △ القائم والمتطابق الضلعين ب م ٩

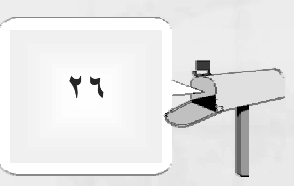
∵ م ٩ (ضلع مقابل لزاوية ٤٥°) = ٩ ب × $\frac{١}{٢}\sqrt{٢}$ = ٣ × $\frac{١}{٢}\sqrt{٢}$ = $\frac{٣}{٢}\sqrt{٢}$

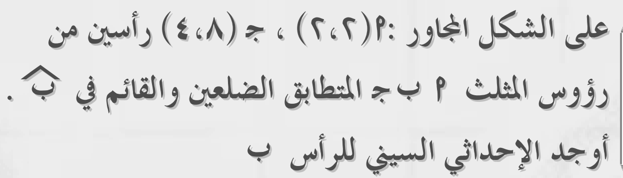
∴ ٩ س = م س − ٩ س = ٣ − $\frac{٣}{٢}\sqrt{٢}$

∴ محيط الشكل المطلوب = ١٨ + ٤ (٣ − $\frac{٣}{٢}\sqrt{٢}$)

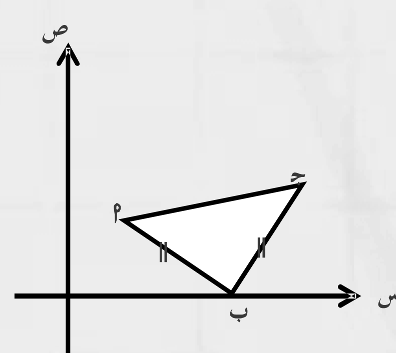
= ١٨ + ١٢ − ٦ $\sqrt{٢}$

= ٣٠ − ٦ $\sqrt{٢}$



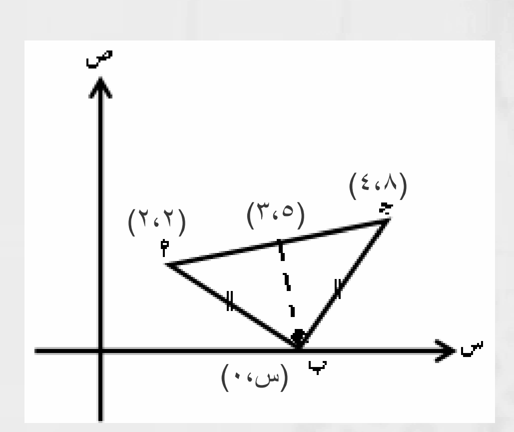


على الشكل المجاور : ﻫ(٢،٢) ، ﺟ (٨،٤) رأسين من رؤوس المثلث ﻫ ب ﺟ المتطابق الضلعين والقائم في $\hat{ب}$.
أوجد الإحداثي السيني للرأس ب



(المصدر – المسابقات الكندية – مسابقة فيرمات – ٢٠ فبراير ٢٠٠٧ م)





بفرض أن إحداثيات نقطة ب(س ، ٠)

∵ ﻫ (٢ ، ٢) ، ﺟ (٨ ، ٤)

∴ إحداثيات منتصف ﻫ ﺟ ولتكن د = $\left(\frac{٨+٢}{٢}،\frac{٤+٢}{٢}\right)=(٥،٣)$

∵ | ب ﺟ | = | ﻫ ﺟ |

، ∵ ∠ ب = ٩٠°

∴ ب د ⊥ ﻫ ﺟ

∴ ميل ﻫ ﺟ = $\frac{٤-٢}{٨-٢}=\frac{١}{٣}$

∴ ميل ب د (العمودي) = – ٣

∴ –٣ = $\frac{٠-٣}{س-٥}$

∴ –٣س + ١٥ = –٣

∴ –٣س = – ١٨

∴ س = ٦

٢٧

في Δ ٯ ب ج :

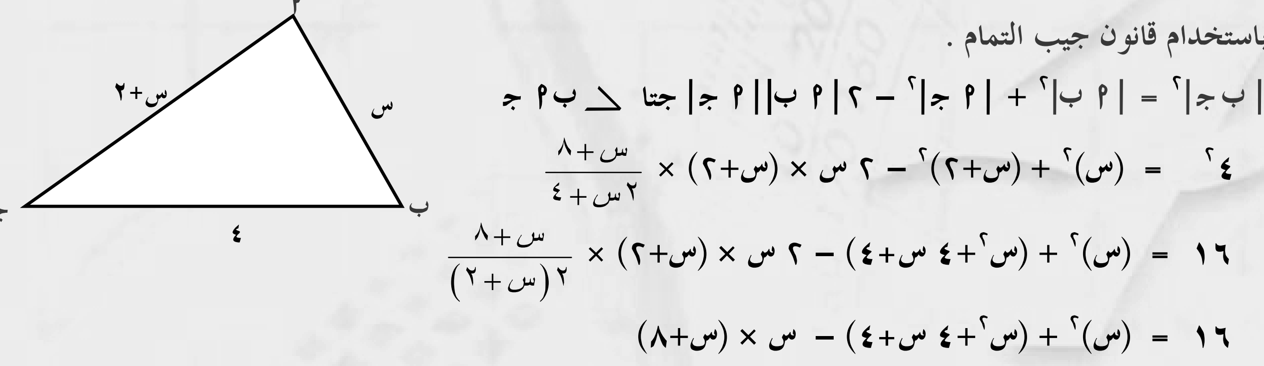
إذا كانت |ب ج| = ٤ سم ، |ٯ ب| = س ، |ٯ ج| = س + ٢

، جتا (∠ ب ٯ ج) = $\frac{\text{س} + ٨}{٢\text{س} + ٤}$.

أوجد جميع القيم الممكنة لـــ س

(المصدر - المسابقات الكندية المفتوحة - ٢٢ نوفمبر ٢٠٠٦)





باستخدام قانون جيب التمام .

|ب ج|^{٢} = |ٯ ب|^{٢} + |ٯ ج|^{٢} − ٢|ٯ ب||ٯ ج| جتا ∠ ب ٯ ج

٤^{٢} = (س)^{٢} + (س+٢)^{٢} − ٢ س × (س+٢) × $\frac{\text{س} + ٨}{٢\text{س} + ٤}$

١٦ = (س)^{٢} + (س^{٢}+٤ س+٤) − ٢ س × (س+٢) × $\frac{\text{س} + ٨}{٢(\text{س} + ٢)}$

١٦ = (س)^{٢} + (س^{٢}+٤ س+٤) − س × (س+٨)

١٦ = س^{٢} + س^{٢}+٤ س+٤− س^{٢} − ٨س

١٦ = س^{٢}−٤ س+٤

س^{٢}−٤ س− ١٢= ٠

(س + ٢)(س − ٦) = ٠

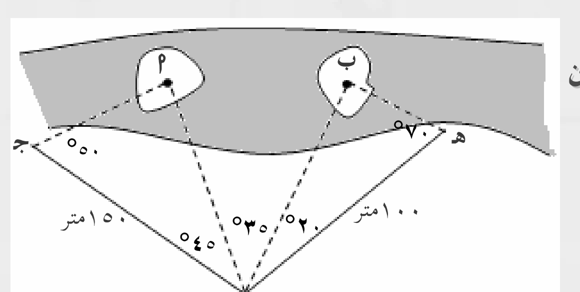
∴ إما : س = −٢ مرفوض

أو س= ٦

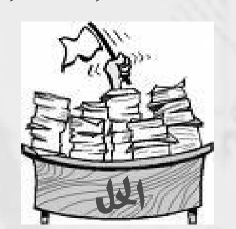
∴ س = ٦

٢٨

على الخريطة المجاورة :
أرادت الحكومة أن تمد جسراً بين الجزيرتان النهريتان ٩، ب ، ولأن النهر كان مليئاً بالمنحدرات المائية الخطيرة، فقد قام المهندسون بحسب المسافة بين الجزيرتان باستخدام المعطيات الموضحة . أوجد هذه المسافة لأقرب متر



(المصدر- المسابقات الكندية -مسابقة إقليدس -١٧ إبريل -٢٠٠٧ م))



في ∆ هـ ب د

∠ هـ ب د = ١٨٠° - (٧٠° + ٢٠°) = ٩٠°

∴ ∆ هـ ب د قائم في ∠ ب

∴ جتا ٢٠° = $\frac{\text{ب د}}{١٠٠}$

∴ |ب د| = ١٠٠ جتا ٢٠° ≈ ٩٣,٩٦٩ متر

في ∆ د ٩ ج

∠ د ٩ ج = ١٨٠° - (٥٠° + ٤٥°) = ٨٥°

∴ $\frac{\text{٩ د}}{\text{جا ٥٠}} = \frac{\text{ج د}}{\text{جا ٨٥}}$

∴ $\frac{\text{٩ د}}{\text{جا ٥٠}} = \frac{١٥٠}{\text{جا ٨٥}}$

∴ ٩ د = $\frac{\text{١٥٠جا٥٠}}{\text{جا ٨٥}}$ ≈ ١١٥,٣٤٦ متر

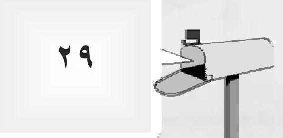
في ∆ ٩ د ب

|٩ ب|^2 = |٩ د|^2 + |ب د|^2 - ٢|٩ د ||ب د| جتا ٩ د ب

|٩ ب|^2≈ (١١٥,٣٤٦)^2 + (٩٣,٩٦٩)^2 - × ١١٥,٣٤٦ × ٩٣,٩٦٩ جتا٣٥°

|٩ ب|^2≈ ٤٣٧٧,٣٧٩

∴ |٩ ب|≈ ٦٦,١٦متر .



إذا كانت: س^{٢} + ص^{٢} = ١٠ ، $\sqrt[٤]{\text{ص س}}$ + $\sqrt{\text{ص س}}$ + ٢٧ = ٢٩

احسب قيمة س + ص .

(المصدر – بطولة مدارس ملتون الأمريكية – ٢٠ فبراير ٢٠٠٤م)



∵ $\sqrt[٤]{\text{ص س}}$ + $\sqrt{\text{ص س}}$ + ٢٧ = ٢٩

∴ (س ص)$^{\frac{١}{٤}}$ + (س ص) $^{\frac{١}{٢}}$ + ٢٧ = ٢٩

∴ (س ص)$^{\frac{١}{٤}}$ + (س ص) $^{\frac{١}{٢}}$ – ٢ = ٠

∴ ((س ص) $^{\frac{١}{٢}}$ + ٢)(س ص) $^{\frac{١}{٢}}$ – ١))= صفر

∴ إما :(س ص) $^{\frac{١}{٢}}$ = –٢ مرفوض

أو : (س ص) $^{\frac{١}{٢}}$ = ١

∴ $\sqrt{\text{ص س}}$ = ١ بالتربيع

∴ س ص = ١ ------------------ ١

∵ س^{٢} + ص^{٢} = ١٠ بإكمال المربع

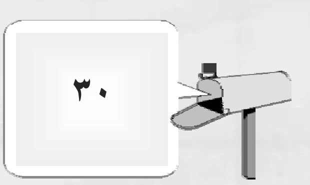
∴ (س + ص)^{٢} – ٢ س ص = ١٠ ------------------٢

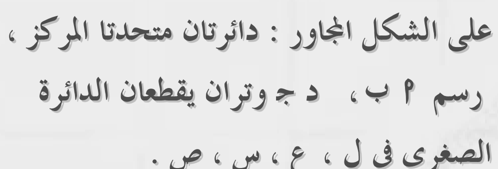
∴ من (١) ، (٢)

∴ (س + ص)^{٢} – ٢ × ١ = ١٠

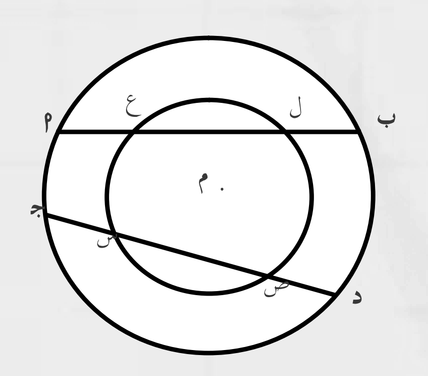
∴ (س + ص)^{٢} = ١٢ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

∴ س + ص = $\sqrt{١٢}$ = ٢$\sqrt{٣}$



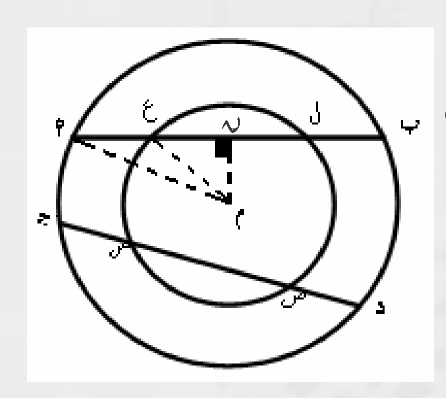


على الشكل المجاور : دائرتان متحدتا المركز ،
رسم أ ب ، د جـ وتران يقطعان الدائرة
الصغرى في ل ، ع ، س ، ص .
إذا كان : $|أع| = ٢$ سم ، $|ل ع| = ١٠$ سم
، $|جـ س| = ٣$ سم . أوجد : $|س ص|$



(المصدر – الدوري العام للرياضيات بين المدارس الثانوية – مدينة وسيكنسون الأمريكية – التصفية الأولى – ٧٩–١٩٩٨م)





نفرض أن : نق١ ، نق٢ نصفي قطري الدائرتين الكبرى والصغرى على الترتيب

نرسم م ه ⊥ أ ب ، ونصل م ع ، م أ

∴ م أ = نق١ ، م ع = نق٢

∵ م ه ⊥ أ ب

∴ ه منتصف كل من : أ ب ، ل ع

في Δ أ ه م القائم في ∠ ه

$|أ م|^2 = |أ ه|^2 + |م ه|^2$

$|أ م|^2 = (|ه ع| + |أ ع|)^2 + |م ه|^2$

∴ $نق١^2 = |ه ع|^2 + |أ ع|^2 + ٢ |ه ع| |أ ع| + |م ه|^2$ ---------------- ١

في Δ ع ه م القائم في ∠ ه

∴ $نق٢^2 = |ه ع|^2 + |م ه|^2$ ---------------- ٢

بطرح (٢) من (١)

∴ $نق١^2 - نق٢^2 = |ه ع|^2 + |أ ع|^2 + ٢ |ه ع| |أ ع| + |م ه|^2 - |ه ع|^2 - |م ه|^2$

∴ $نق١^2 - نق٢^2 = |أ ع|^2 + ٢ |ه ع| |أ ع|$

∴ $نق١^2 - نق٢^2 = |أ ع| (|أ ع| + ٢ |ه ع|)$

∴ $نق١^2 - نق٢^2 = |أ ع| . |أ ل|$ ---------------- ٣

بالمثل

نو$_{م١}$ ٢ − نو$_{م}$ ٢ = | س جـ | . | جـ ص | ---------------- ٤

من (٣) ، (٤)

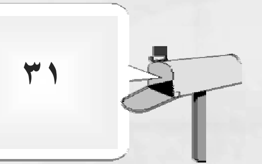
∴ | م ع | . | م ل | = | س جـ | . | جـ ص |

∴ ٢ × (٢ + ١٠) = ٣ × | جـ ص |

∴ ٢٤ = ٣ | جـ ص |

∴ | جـ ص | = ٨

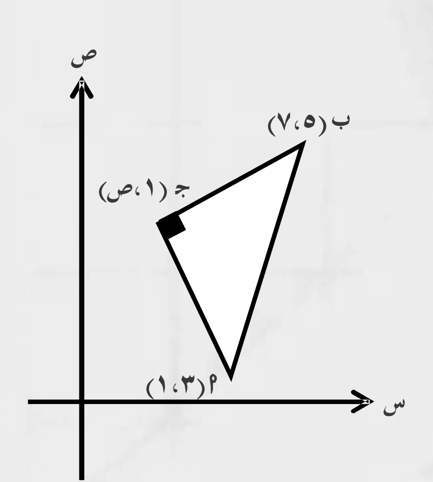
∴ | س ص | = ٨ − ٣ = ٥ سم .



أ ب ج مثلث رؤوسه أ(٣،١) ، ب(٥،٧) ، ج (١،ص) . أوجد جميع قيم ص التي تجعل زاوية ج قائمة.

(المصدر – مسابقة W.JBLUNDON رقم ٢٠ برعاية هيئة الرياضيات الكندية – ١٩ فبراير ٢٠٠٣م)





∵ ب ج ⊥ أ ج

∴ ميل ب ج = $-\dfrac{١}{\text{ميل ب ج}}$

ميل ب ج = $\dfrac{\text{ص} - ٧}{١ - ٥} = \dfrac{٧ - \text{ص}}{٤}$

ميل أ ج = $\dfrac{\text{ص} - ١}{١ - ٣} = \dfrac{١ - \text{ص}}{٢}$

∴ $\dfrac{٧ - \text{ص}}{٤} = -\dfrac{٢}{١ - \text{ص}}$

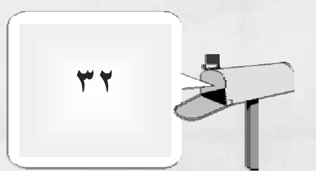
∴ (٧ − ص) (١ − ص) = − ٨

∴ ٧ − ٧ ص − ص + $\text{ص}^{٢}$ = − ٨

∴ $\text{ص}^{٢}$ − ٨ ص + ٥ = ٠

∴ (ص − ٥) (ص − ٣) = ٠

ص = ٣ ، ص = ٥

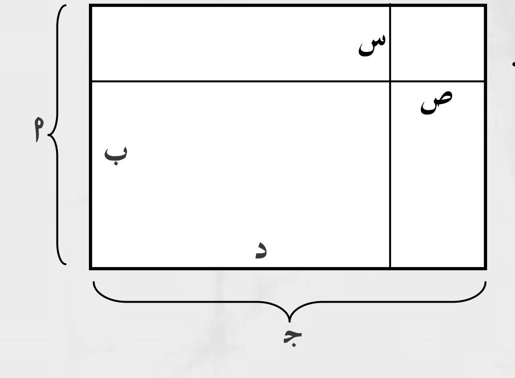


إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{ج}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}} = \frac{٣}{٤}$ ، $\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ج}^٢} - \sqrt{\text{ب}^٢ + \text{د}^٢} = ١٥$.

أوجد : أ ج + ب د − أ د − ب ج

(المصدر – بطولة مدارس مدينة ستانفورد الأمريكية– ٢٠٠٠م)





من الممكن باستخدام الشروط الموضحة بالمشكلة أن نرسم الشكل التالي .

ومن الرسم نستنتج أن :–

$$\frac{\text{أ}}{\text{ج}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٣}{٤}$$

$$\therefore \text{أ} = \text{ج} \cdot \frac{\text{س}}{\text{ص}} \quad ، \quad \text{ب} = \text{د} \cdot \frac{\text{س}}{\text{ص}}$$

بالتعويض في : $\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ج}^٢} - \sqrt{\text{ب}^٢ + \text{د}^٢} = ١٥$.

$$\therefore \sqrt{\text{ج}^٢ \cdot \frac{\text{س}^٢}{\text{ص}^٢} + ١} - \sqrt{\text{د}^٢ \cdot \frac{\text{س}^٢}{\text{ص}^٢} + ١} = ١٥$$

$$\therefore \text{ج} \sqrt{\frac{\text{س}^٢}{\text{ص}^٢} + ١} - \text{د} \sqrt{\frac{\text{س}^٢}{\text{ص}^٢} + ١} = ١٥$$

$$\therefore (\text{ج} - \text{د}) \sqrt{\frac{\text{س}^٢}{\text{ص}^٢} + ١} = ١٥$$

$$\therefore (\text{ج} - \text{د}) \sqrt{\frac{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢}{\text{ص}^٢}} = ١٥$$

$$\therefore (\text{ج} - \text{د}) \frac{١}{\text{ص}} \sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢} = ١٥$$

ولكن : ج − د = ص

$$\therefore \sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢} = ١٥$$

من الممكن صياغة المطلوب على الصورة :

أ ج + ب د − أ د − ب ج = (أ ج – أ د) + (ب د – ب ج) = أ (ج – د) – ب(ج – د)

= (أ – ب)(ج – د) = س ص .

$\therefore \sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢} = ١٥$ بالتربيع

$$\therefore \text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ٢٢٥$$

$\because \frac{س}{ص} = \frac{٣}{٤}$

$\therefore س = \frac{٣}{٤} ص$

$\therefore (\frac{٣}{٤} ص)^٢ + ص^٢ = ٢٢٥$

$\therefore \frac{٩}{١٦} ص^٢ + ص^٢ = ٢٢٥$

$\therefore \frac{٢٥}{١٦} ص^٢ = ٢٢٥$

$\therefore ص^٢ = ٢٢٥ \times \frac{١٦}{٢٥}$

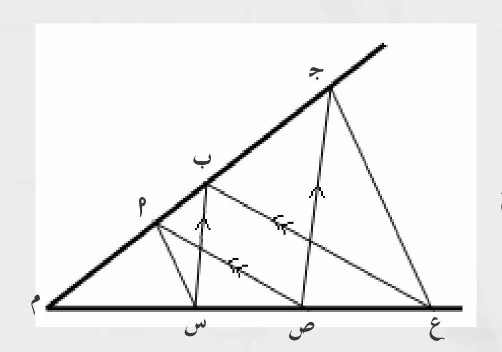
$\therefore ص^٢ = ١٤٤$

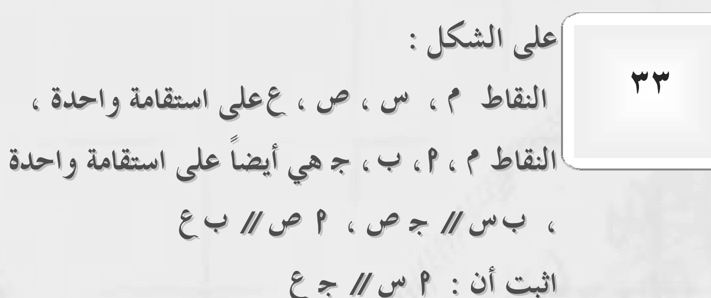
$\therefore ص = ١٢$

$\therefore س = ١٢ \times \frac{٣}{٤} = ٩$

$\therefore س ص = ١٢ \times ٩ = ١٠٨$

$\therefore$ ٩ جـ + ب د - ٩ د - ب جـ = ١٠٨





على الشكل :

النقاط م ، س ، ص ، ع على استقامة واحدة ،

النقاط م ، ﻡ ، ب ، ج هي أيضاً على استقامة واحدة

، ب س // ج ص ، ﻡ ص // ب ع

اثبت أن : ﻡ س // ج ع

(المصدر – الدوري العام للرياضيات بين المدارس الثانوية – مدينة وسيكنسون الأمريكية – التصفية الثانية –نوفمبر ٢٠٠٢م)



∵ ﻡ ص // ب ع

∴ Δ م ﻡ ص يشابه Δ م ب ع

∴ $\frac{\text{م ﻡ}}{\text{م ب}} = \frac{\text{م ص}}{\text{م ع}}$ ومنها $\frac{\text{م ﻡ}}{\text{م ص}} = \frac{\text{م ب}}{\text{م ع}}$ ---------------- ١

، بالمثل ∵ Δ م ب س يشابه Δ م ج ص

∴ $\frac{\text{م ج}}{\text{م ب}} = \frac{\text{م ص}}{\text{م س}}$ ---------------- ٢

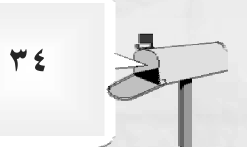
من الممكن كتابة العلاقة : $\frac{\text{م ﻡ}}{\text{م س}} = \frac{\text{م ﻡ}}{\text{م ص}} \times \frac{\text{م ص}}{\text{م س}}$

∴ من (١) ، (٢)

∴ $\frac{\text{م ﻡ}}{\text{م س}} = \frac{\text{م ب}}{\text{م ع}} \cdot \frac{\text{م ج}}{\text{م ب}} = \frac{\text{م ج}}{\text{م ع}}$

∴ Δ م ﻡ س يشابه Δ م ج ع

∴ ﻡ س // ج ع.



إذا كان : $أ ، ب ، ج > ٠$ ، $أ > ب ج$ ، $١ + أ^{٣} = ب^{٣} + ج^{٣}$



اثبت أن : $١ + أ > ب + ج$

(المصدر – مسابقة التعليم العام – جامعة تورنتو ١٨ مارس ٢٠٠١ هـ)



$\because ١ + أ^{٣} = ب^{٣} + ج^{٣}$ بالتحليل

$\therefore (١ + أ)(١ - أ + أ^{٢}) = (ب + ج)(ب^{٢} - ب ج + ج^{٢})$

، $\because (١ - أ + أ^{٢})$ ، $(ب^{٢} - ب ج + ج^{٢})$ مقادير موجبة

$\therefore ١ + أ > ب + ج \iff (١ - أ + أ^{٢}) < (ب^{٢} - ب ج + ج^{٢})$

، بفرض أن : $١ + أ \leqslant ب + ج$

$ب^{٢} - ب ج + ج^{٢} \leqslant ١ - أ + أ^{٢}$ بإكمال المربع

$\therefore (ب + ج)^{٢} - ٣ ب ج \leqslant (١ + أ)^{٢} - ٣ أ$

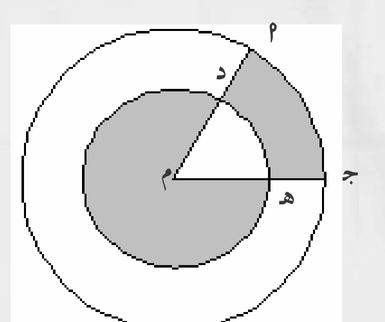
$\because أ > ب ج$

$\therefore (ب + ج)^{٢} - ٣ ب ج \leqslant (١ + أ)^{٢} - ٣ أ < (١ + أ)^{٢} - ٣ ب ج$

$\therefore (ب + ج)^{٢} - ٣ ب ج < (١ + أ)^{٢} - ٣ ب ج$

$\therefore (ب + ج)^{٢} < (١ + أ)^{٢}$

$\therefore ب + ج < ١ + أ$





على الشكل المجاور:

دائرتان متحدتا المركز في نقطة م ،

نصفي قطريهما ١سم، ٢ سم .

إذا كان مجموع مساحات الأجزاء المظللة

يساوي $\frac{٥}{١٢}$ من مساحة الدائرة الكبرى.

ما هو القياس الممكن لزاوية أ م جـ الذي يحقق الشروط السابقة.

(المصدر – المسابقة الكندية – مسابقة بسكال – ٢٠ فبراير ٢٠٠٧ هـ)



∵ نصف قطر الدائرة الكبرى = ٢ سم

∴ مساحة الدائرة الكبرى = ٤ ط سم^{٢}

∴ إجمالي مساحة الأجزاء المظللة = ٤ ط × $\frac{٥}{١٢}$ = $\frac{٥}{٣}$ ط سم^{٢} ---------------- ١

نفرض أن قياس ∠ أ م جـ = س°

∴ مساحة القطاع الغير مظلل في الدائرة الصغرى = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} × هـ ء

$$= \frac{١}{٢} \times (١)^{٢} \times \frac{س°}{١٨٠} \times ط$$

$$= \frac{س°}{٣٦٠} \times ط$$

∴ مساحة القطاع المظلل في الدائرة الصغرى = ط نق^{٢} − $\frac{س°}{٣٦٠} \times ط$

$$= ط \times (١)^{٢} - \frac{س°}{٣٦٠} \times ط$$

$$= ط - \frac{س°}{٣٦٠} \times ط$$

$$= \left(١ - \frac{س°}{٣٦٠}\right) \times ط = \frac{٣٦٠ - س°}{٣٦٠} ط$$

∵ مساحة القطاع المظلل في الدائرة الكبرى = مساحة القطاع ٩ م جـ – مساحة القطاع د م هـ

$$= \frac{1}{2} \times (2)^2 \times \frac{س^\circ}{180} \times ط - \frac{1}{2} \times (1)^2 \times \frac{س^\circ}{180} \times ط$$

$$= \frac{4س^\circ}{360} \times ط - \frac{س^\circ}{360} \times ط = \frac{3س^\circ}{360} \times ط$$

∴ إجمالي المساحة المظللة $= \frac{360 - س^\circ}{360} ط + \frac{3س^\circ}{360} ط = \frac{360 + 2س^\circ}{360} ط$ ------------ ٢

من (١) ، (٢)

∴ $\frac{5}{3} ط = \frac{360 + 2س^\circ}{360} ط$

∴ $\frac{5}{3} = \frac{360 + 2س^\circ}{360}$

∴ ٣ (٣٦٠ + ٢س°) =٥ × ٣٦٠ بالقسمة على ٣

∴ ٣٦٠ + ٢س° =٥ × ١٢٠

∴ ٢س° =٦٠٠ – ٣٦٠

∴ ٢س° =٢٤٠

∴ س° =١٢٠



أوجد مجموعة حل المعادلة :

$٤ \left(١٦^{\text{جا}^2 س} \right) = ٢^{٦ \text{جا} س}$ لكل $٠ \leqslant س \leqslant ٣٦٠$

(المصدر - مسابقة التحدي الكندية المفتوحة ٢٩ نوفمبر ٢٠٠٠)



$\therefore ٤ \left(١٦^{\text{جا}^2 س} \right) = ٢^{٦ \text{جا} س}$

$\therefore ٢^2 \left(٢^{٤ \text{جا}^2 س} \right) = ٢^{٦ \text{جا} س}$

$\therefore ٢^{٤ \text{جا}^2 س + ٢} = ٢^{٦ \text{جا} س}$

$\therefore ٤ \text{جا}^2 س + ٢ = ٦ \text{جا} س$

$\therefore ٤ \text{جا}^2 س - ٦ \text{جا} س + ٢ = ٠$ بالقسمة على ٢

$\therefore ٢ \text{جا}^2 س - ٣ \text{جا} س + ١ = ٠$

$\therefore (٢ \text{جا} س - ١)(\text{جا} س - ١) = ٠$

$\therefore$ إما : $٢ \text{جا} س - ١ = ٠$ ومنها $\text{جا} س = \frac{١}{٢}$

$\therefore س = ٣٠°$ أو $١٥٠°$

أو $\text{جا} س - ١ = ٠$ ومنها $\text{جا} س = ١$

$\therefore س = ٩٠°$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{ ٣٠° ، ١٥٠° ، ٩٠° \}$

٣٧

يعدو حازم بسرعة ٢١ كم / س من النقطة ٩ إلى ب إلى جـ ثم إلى د ويعدو يوسف بسرعة ثابتة من ٩ إلى جـ ثم إلى د
إذا كان حازم ويوسف تحركا معاً من ٩ في نفس اللحظة ووصلا إلى النقطة د معا .
إذا كانت المسافات كما هو موضح على الرسم
فكم عدد الدقائق التي وصل بها يوسف قبل حازم إلى النقطة جـ
(تم تعريب الأسماء والرموز).

٩
٨ كم
٧ كم
ب ١٥ كم جـ د

(المصدر- المسابقة الكندية - مسابقة بسكال - ٢٠ فبراير ٢٠٠٧ هـ)



من نظرية فيثاغورث : ٩ جـ = $\sqrt{(١٥)^٢ + (٨)^٢} = \sqrt{٢٨٩}$ = ١٧ كم

∴ مجموع المسافة التي قطعها حازم = ٨ + ١٥ + ٧ = ٣٠ كم

، مجموع المسافة التي قطعها يوسف = ١٧ + ٧ = ٢٤ كم

∵ حازم ويوسف وصلا إلى النقطة د في نفس الوقت .

∴ الزمن ثابت .

∴ $\frac{\text{سرعة حازم}}{\text{سرعة يوسف}} = \frac{\text{المسافة التي قطعها حازم}}{\text{المسافة التي قطعها يوسف}}$

∴ $\frac{٢١}{\text{سرعة يوسف}} = \frac{٣٠}{٢٤}$

∴ سرعة يوسف = $\frac{٢١ \times ٢٤}{٣٠} = \frac{٨٤}{٥}$ كم / س

∴ زمن يوسف من ٩ إلى جـ = ١٧ ÷ $\frac{٨٤}{٥}$ = ١٧ × $\frac{٥}{٨٤} = \frac{٨٥}{٨٤}$ ساعة = $\frac{٨٥}{٨٤}$ × ٦٠ = $\frac{٤٢٥}{٧}$ دقيقة

∴ زمن حازم من ٩ إلى جـ = (٨ + ١٥) ÷ ٢١ = $\frac{٢٣}{٢١}$ ساعة = $\frac{٢٣}{٢١}$ × ٦٠ = $\frac{٤٦٠}{٧}$ دقيقة

∴ عدد الدقائق = $\frac{٤٦٠}{٧} - \frac{٤٢٥}{٧} = \frac{٣٥}{٧}$ = ٥ دقائق

٣٨

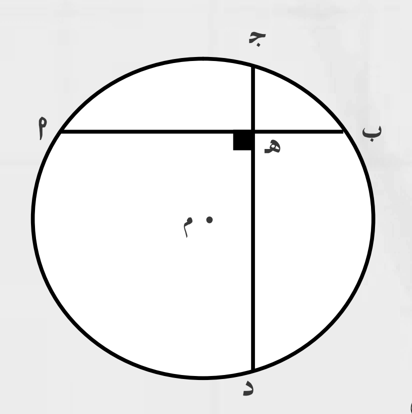
على الشكل : م دائرة

فيها ا ب ، ج د وتران متعامدان يتقاطعان في هـ

إذا كان : |ا هـ| = ١٢سم ،

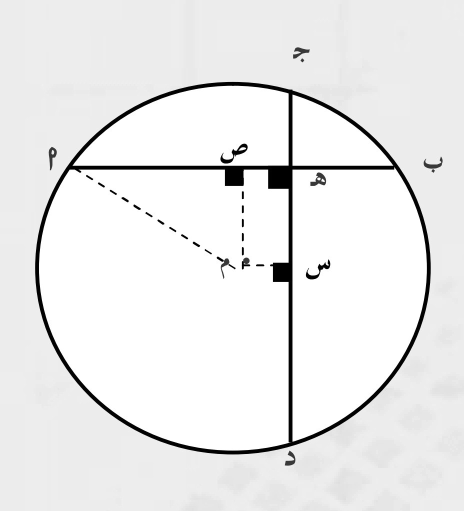
|د هـ|=٦سم ، |هـ ج| = ٤سم .

أحسب مساحة سطح الدائرة م



(المصدر – مسابقة المدارس الثانوية – جامعة جنوب كارولينا الأمريكية – ١ فبراير ٢٠٠٣ م)





من تشابه △ ا ج هـ ، △ د ب هـ

ا هـ / د هـ = ج هـ / ب هـ

∴ ا هـ . ب هـ = ج هـ . د هـ

∴ ١٢ × ب هـ = ٤ × ٦

∴ ب هـ = ٢ سم

∴ ا ب = ١٢ + ٢ = ١٤ سم

نصل ا م ، وترسم م س ، م ص عمودان على د ج ، ا ب يقطعاهما على الترتيب في س ، ص .

∵ م ص ⊥ ا ب

∴ ص منتصف ا ب

∴ ا ص = ٧ سم .

، بالمثل س منتصف ج د

∴ د س = ٥ سم

∴ هـ س = ٥ − ٤ = ١ سم

∵ ا ب ⊥ ج د

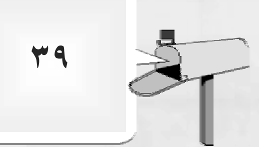
∴ الشكل م س هـ ص مستطيل

∴ م ص = ١ سم

في △ ا ص م القائم في ص

|ا م|٢ = ٤٩ + ١ = ٥٠ = نق٢

∴ مساحة الدائرة = ٥٠ ط سم ٢





على الشكل المجاور :

ﻫ ب جـ د مستطيل فيه و ﻫ ⊥ ﻫ ب ،

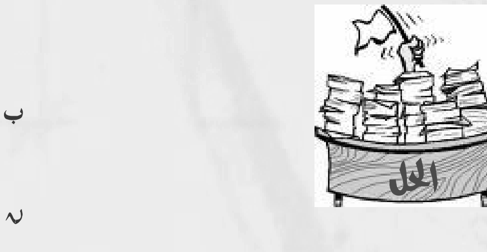
مساحة الشكل ﻫ ﻫ و جـ = مساحة الشكل ﻫ و جـ ب .

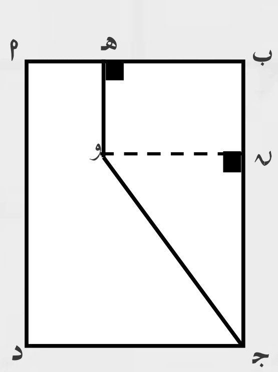
إذا كان :

|ب ﻫ| = ٤٠ سم ، |ﻫ د| = ٨٠ سم ، |ﻫ و| = ٣٠ سم

احسب طول : ﻫ ﻫ

(المصدر – المسابقة الكندية – مسابقة بسكال – ٢٠ فبراير ٢٠٠٧ هـ)





نرسم و ى ⊥ ب جـ

∴ الشكل ب ى و ﻫ مستطيل

∴ ب ى = ٣٠ سم

∴ |ى جـ| = ٨٠ − ٣٠ = ٥٠ سم

∵ مساحة المستطيل ب ى و ﻫ = ٤٠ × ٣٠ = ١٢٠٠ سم^{٢}

، مساحة المثلث ى و جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٤٠ × ٥٠ = ١٠٠٠ سم^{٢}

∴ مساحة الشكل ب جـ و ﻫ = ١٢٠٠ + ١٠٠٠ = ٢٢٠٠ سم^{٢}

∵ مساحة المستطيل ﻫ ب جـ د = مساحة الشكل ﻫ ﻫ و جـ د + مساحة الشكل ب جـ و ﻫ

، ∵ مساحة الشكل ﻫ ﻫ و جـ = مساحة الشكل ﻫ و جـ ب .

∴ مساحة المستطيل ﻫ ب جـ د = ٢ مساحة الشكل ﻫ و جـ ب .

∴ مساحة المستطيل ﻫ ب جـ د = ٢ × ٢٢٠٠ = ٤٤٠٠

∵ مساحة المستطيل ﻫ ب جـ د = ﻫ د . ﻫ ب

∴ ٤٤٠٠ = ٨٠ × (ﻫ ﻫ + ٤٠)

∴ ٤٤٠٠ = ٨٠ ﻫ ﻫ + ٣٢٠٠

∴ ٨٠ ﻫ ﻫ = ٤٤٠٠ − ٣٢٠٠

∴ ٨٠ ﻫ ﻫ = ١٢٠٠

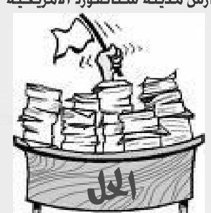
∴ ﻫ ﻫ = ١٥ سم

٤٠

إذا كانت : $س^{٢} - ٣ س + ١ = صفر$

فأوجد القيمة العددية للمقدار : $س^{٩} + س^{٧} + س^{-٩} + س^{-٧}$

(المصدر – بطولة مدارس مدينة ستانفورد الأمريكية–٢٨ فبراير ٢٠٠٤ م)



∵ $س^{٢} - ٣ س + ١ = صفر$ بالقسمة على س

∴ $\frac{س^{٢}}{س} - \frac{٣س}{س} + \frac{١}{س} = ٠$

∴ $\frac{س^{٢}}{س} - ٣ + \frac{١}{س} = ٠$

∴ $س + \frac{١}{س} = ٣$ ----------------- ١

$س^{٩} + س^{٧} + س^{-٩} + س^{-٧} = (س^{٩} + س^{٧}) + (س^{-٩} + س^{-٧})$

$= س^{٨}\left(س + \frac{١}{س}\right) + س^{-٨}\left(\frac{١}{س} + س\right)$

$= (س^{٨} + س^{-٨})\left(س + \frac{١}{س}\right)$

بالتعويض من (١) : ∴ $س^{٩} + س^{٧} + س^{-٩} + س^{-٧} = ٣(س^{٨} + س^{-٨})$

∴ $س^{٩} + س^{٧} + س^{-٩} + س^{-٧} = ٣\left(س^{٨} + \frac{١}{س^{٨}}\right)$ ----------------- ٢

∵ $س + \frac{١}{س} = ٣$ بالتربيع

∴ $س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}} + ٢ = ٩$

∴ $س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}} = ٧$ بالتربيع

∴ $س^{٤} + \frac{١}{س^{٤}} + ٢ = ٤٩$

∴ $س^{٤} + \frac{١}{س^{٤}} = ٤٧$ بالتربيع

∴ $س^{٨} + \frac{١}{س^{٨}} + ٢ = ٢٢٠٩$

∴ $س^{٨} + \frac{١}{س^{٨}} = ٢٢٠٧$ ----------------- ٣

بالتعويض من (٣) في (٢)

∴ $س^{٩} + س^{٧} + س^{-٩} + س^{-٧} = ٣ \times ٢٢٠٧ = ٦٦٢١$

الجزء الثاني



المسابقات الكاملة

الحلول الكاملة

لجميع أسئلة مسابقة الأولمبياد الأمريكية رقم ٢٧ للرياضيات ما قبل المرحلة الجامعية

مارس ١٩٧٦

(المصدر: مجلة الرياضيات — الصادرة عن رابطة مدرسي الرياضيات بجمهورية مصر العربية
العدد الثاني ديسمبر ١٩٨٢ م)

١) إذا كان باقي طرح مقلوب (١– س) من ١ يساوي مقلوب (١– س) فإن س =

○ ٢- ● ١- ○ $\frac{١}{٢}$ ○ ٢ ○ ٣



$١ - \frac{١}{١-\text{س}} = \frac{١}{١-\text{س}}$ ∴ $\frac{٢}{١-\text{س}} = ١$ ∴ $\frac{١}{١-\text{س}} + \frac{١}{١-\text{س}} = ١$ ∴ ١ – س = ٢

∴ س = –١

٢) كم عدداً حقيقياً س يجعل $\sqrt{-(\text{س}+١)^٢}$ عدداً حقيقياً

○ لا يوجد أي عدد ● واحد ○ اثنان ○ عدد محدود > ٣ ○ عدد غير منتهي



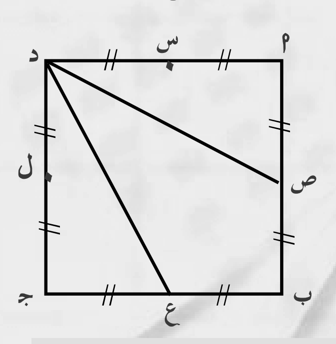
$\sqrt{-(\text{س}+١)^٢}$ يكون عدداً حقيقياً إذا كان $-(\text{س}+١)^٢ \geqslant ٠$

، ∵ $-(\text{س}+١)^٢$ لا يمكن أن يكون موجباً ، ∵ $-(\text{س}+١)^٢ = ٠$ إذا كانت س = –١

∴ يوجد قيمة واحدة للمتغير س تجعل $\sqrt{-(\text{س}+١)^٢}$ عدداً حقيقياً .

٣) مجموع أبعاد أحد رؤوس مربع طول ضلعه ٢ وحدة طول عن منتصفات كل ضلع من أضلاع المربع يساوي:

○ $٢\sqrt{٥}$ ○ $٢+\sqrt{٥}$ ○ $٢+٢\sqrt{٣}$ ○ $٢+\sqrt{٥}$ ● $٢+٢\sqrt{٥}$

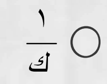
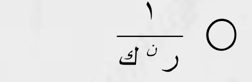
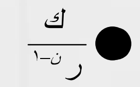
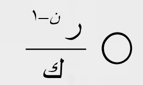


البعد من الرأس د = د س + د ص + د ع + د ل

$= ١ + \sqrt{٥} + ١ + \sqrt{٥}$

$= ٢ + ٢\sqrt{٥}$

٤) إذا كان الحد الأول من متوالية هندسية = ١ ، وأساسها = ر وعدد حدودها = ن ، ومجموع هذه الحدود = ك حيث كل من ر ، ك لا يساوي صفراً فإن مجموع مقلوبات حدود هذه المتوالية يكون :

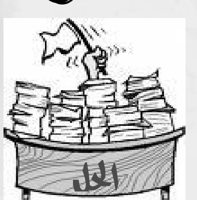


$ج = \frac{ر^{ن} - ١}{ر - ١}$

مجموع مقلوبات الحدود $= \frac{ر^{-ن} - ١}{ر^{-١} - ١} = \frac{ر^{-ن} - ١}{ر^{-١} - ١} \times \frac{ر^{ن}}{ر^{ن}} = \frac{١ - ر^{ن}}{ر^{ن-١} - (١ - ر)} = \frac{ك}{ر^{ن-١}}$

٥) ما هو عدد الأعداد الصحيحة المحصورة بين عشرة ومائة ، والتي كل منها ، إذا كتب في النظام العشري ، يزيد بمقدار تسعة عند عكس وضع رقميه .

 صفر    ١    ٨   ○ ٩   ○ ١٠



نفرض أن رقم الآحاد = س ، ورقم العشرات = ص

∴ (ص + ١٠ س) − (س + ١٠ ص) = ٩   ∴ س − ص = ١

∴ رقم الآحاد يزيد واحداً عن رقم العشرات . ∴ الأعداد هي : ١٢ ، ٢٣ ، ٣٤ ، ٤٥ ، ٥٦ ، ٦٧ ، ٧٨ ، ٨٩

∴ عدد الأعداد = ٨

٦) إذا كان ج عدداً حقيقياً وكان المعكوس الجمعي لأحد جذري المعادلة : $س^{٢} - ٣ س + ج = ٠$ هو حل المعادلة : $س^{٢} + ٣ س - ج = ٠$ فإن جذري المعادلة : $س^{٢} - ٣ س + ج = ٠$ هما :−

○ ١ ، ٢   ○ −١ ، −٢   ● ٠ ، ٣   ○ ٠ ، −٣   ○ $\frac{٣}{٢} ، \frac{٣}{٢}$



م ، − م هما على الترتيب جذران للمعادلتين : $س^{٢} - ٣ س + ج = ٠$ ، $س^{٢} - ٣ س - ج = ٠$

∴ $م^{٢} - ٣م + ج = ٠$ ، $م^{٢} + ٣ م - ج = ٠$

بالجمع ينتج أن : $٢ م^{٢} = ٠$ ∴ م = ٠   ∴ ج = ٠

∴ المعادلة : $س^{٢} - ٣ س + ج = ٠$ هي المعادلة : $س^{٢} - ٣ س = ٠$

∴ س = ٠ أو ٣

٧) إذا كانت س عدداً حقيقياً فإن المقدار (١ – | س|) (١ + س) يكون موجباً إذا وفقط إذا :

○ |س| < ١ ○ س > ١ ○ |س| > ١

○ س < -١ ● س < -١ أو -١ < س < ١



نفرض أن : ص = (١ – | س|) (١ + س)

∵ | س| = – س عندما س < ٠ ، | س| = س عندما س ⩾ ٠

∴ ص = { (١ + س)^٢ عندما س < ٠ ؛ (١ – س)(١ + س) عندما س ⩾ ٠ }

∴ ص = ٠ عندما س = –١ أو عندما س = ١

النقط –١ ، ٠ ، ١ تقسم خط الأعداد إلى ٤ فترات والجدول التالي يبين إشارة ص في هذه الفترات

الفترة	س < –١	–١ < س < ٠	٠ ⩽ س < ١	س > ١
قيمة ص	موجبة	موجبة	موجبة	سالبة

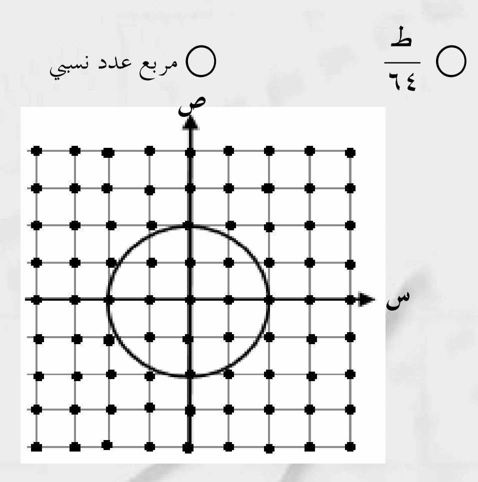
ص تكون موجبة إذا كان : س < – ١ أو –١ < س < ١ وبالعكس إذا كانت ص موجبة

فإن : س < – ١ أو –١ < س < ١

∴ ص تكون موجبة إذا وفقط إذا كان : س < – ١ أو –١ < س < ١.

٨) مجموعة من النقط في مستوى معلوم إحداثياً كل منها بالنسبة إلى محورين متعامدين في المستوى عددان صحيحان والقيمة المطلقة لكل من هذين الاحداثيين أقل من أو يساوي ٤ . اختيرت إحدى هذه النقط عشوائياً . ما هو احتمال أن يكون بعد النقطة المختارة عن نقطة الأصل أقل من أو يساوي ٢ علماً بأن احتمالات اختيار التقط المختلفة متساوية ؟

● $\frac{١٣}{٨١}$ ○ $\frac{١٥}{٨١}$ ○ $\frac{١٣}{٦٤}$ ○ $\frac{ط}{٦٤}$ ○ مربع عدد نسبي





عدد عناصر فراغ العينة = ٩ × ٩ = ٨١ عنصراً

، عدد عناصر الحدث المطلوب إيجاد احتماله

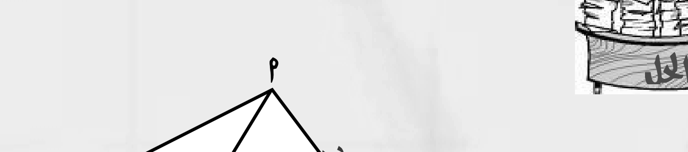
= عدد العناصر في المنطقة س^٢ +ص^٢ ⩽ ٢

= ١٣ عنصراً ∴ الاحتمال = $\frac{١٣}{٨١}$

٩) أ ب جـ مثلث ، د منتصف أ ب ، هـ منتصف د ب ، و منتصف ب جـ ، فإذا كانت مساحة △ أ ب جـ = ٩٦

فإن مساحة △ أ هـ و =

○ ١٦ ○ ٢٤ ○ ٣٢ ● ٣٦ ○ ٤٨



△ أ هـ و = $\frac{٣}{٤}$ △ أ ب و = $\frac{٣}{٤}$ × $\frac{١}{٢}$ △ أ ب جـ

= $\frac{٣}{٨}$ △ أ ب جـ

= $\frac{٣}{٨}$ × ٩٦ = ٣٦

١٠) إذا كان : م ، ن ، هـ ، ك أربعة أعداد حقيقية ، وكان د(س)= م س + ن ، ر(س) = هـ س + ك

فإن المعادلة : د(ر(س)) = ر(د(س)) يكون لها حل.

○ لجميع قيم م ، ن ، هـ ، ك ○ إذا وفقط إذا م = هـ ، ن = ك ○ إذا وفقط إذا م ك − ن هـ = ٠

● إذا وفقط إذا ن (١− هـ) − ك (١−ن) ○ إذا وفقط إذا (١−ن) (١− هـ) − (١−ك) (١− م) = ٠



د(ر (س)) = د (هـ س + ك) = م (هـ س + ك) + ن

= م هـ س + م ك + ن

ر (د (س)) = ر(م س + ن) = هـ(م س + ن) + ك

= هـ م س + هـ ن + ك

المعادلة : د(ر س)) = د(ر س))

هي المعادلة : م هـ س + م ك + ن = هـ م س + هـ ن + ك

ويكون لهذه المعادلة حل إذا وفقط إذا كان للمعادلة :

(م هـ −هـ م) س +(م ك + ن −هـ ن− ك) =٠

وحيث أن هذه المعادلة من الدرجة الأولى ، معامل س= صفر

∴ يكون للمعادلة حل إذا وفقط

إذا كان : م ك + ن −هـ ن− ك =٠

أي إذا وفقط إذا كان : ن(١ − هـ) − ك (١ − م) = ٠

١١)أي التقرير الآتية يكافئ التقرير التالي :

إذا كان الفيل القرنفلي اللون على الكوكب ألفا له عيون أرجوانية فإن الحمار الوحشي على الكوكب بيتا لا يكون له ذيل طويل.

I . إذا كان الحمار الوحشي على الكوكب بيتا ذا ذيل طويل فإن الفيل القرنفلي اللون على الكوكب ألفا يكون له عيون أرجوانية.

II. إذا كان الفيل القرنفلي اللون على الكوكب ألفا ليس له عيون أرجوانية فإن الحمار الوحشي على الكوكب بيتا لا يكون له ذيل طويل .

III . إذا كان الحمار الوحشي على الكوكب بيتا له ذيل طويل فإن الفيل القرنفلي اللون على الكوكب ألفا لا يكون له عيون أرجوانية .

IV. الفيل القرنفلي علي الكوكب ألفا ليس له عيون أرجوانية أو الحمار الوحشي على الكوكب بيتا له أنف طويل.

○ (I) ، (III) فقط ● (III) ، (VI) فقط ○ (II) ، (VI) فقط ○ (II) ، (III) فقط ○ (III) فقط



الفيل ذو اللون القرنفلي على الكوكب ألفا له عيون أرجوانية ، الحمار الوحشي على الكوكب بيتا له أنف طويل بالرمزين ه ، ك على الترتيب .

فيكون التقرير المعطى هو : ه ← –ك

وتكون التقارير الأربعة الأخرى هي :

I) ك ← ه II) – ه ← –ك III) ك ← – ه VI) – ه ∨ – ك

وهذه التقارير تكافئ على الترتيب :

–ك ∨ ه ، ه ∨ –ك ، –ك ∨ – ه ، – ه ∨ – ك

∵ التقرير : ه ← –ك يكافئ التقرير – ه ∨ – ك

∴ التقرير المعطى يكافئ التقريرين (III) ، (VI) فقط

١٢) سوبر ماركت به ١٢٨ صندوقاً من التفاح ، وكل صندوق يحتوي على ١٢٠ تفاحة على الأقل وعلى ١٤٤ تفاحة على الأكثر . ما هو أكبر عدد صحيح ن صندوق على الأقل يجب أن يحتوي على نفس العدد من التفاح ؟

○ ٤ ○ ٥ ● ٦ ○ ٢٤ ○ ٢٥

نتصور أننا وضعنا الصناديق في أكوام بحيث تكون الصناديق التي تحتوي على نفس العدد من التفاح في كوم واحد .

نفرض أن عدد الأكوام = س ، عدد الصناديق في أكبر الأكوام = ن

∵ عدد الصناديق = ١٢٨ صندوقاً

∴ س ن ≥ ١٢٨ ------------------- ١

∵ الصندوق يحتوي على ١٢٠ تفاحة على الأقل وعلى ١٤٤ تفاحة على الأكثر .

∴ أكبر عدد من الأكوام يمكن أن يكون موجوداً في السوبر ماركت = ١٤٤ − ١١٩ = ٢٥

، ∵ عدد الأكوام = س فرضاً

∴ س ≤ ٢٥

∴ س ن ≤ ٢٥ ن ------------------- ٢

من (١) ، (٢)

∴ ٢٥ ن ≥ س ن ≥ ١٢٨

∴ ن ≥ ١٢٨/٢٥

∴ ن ≥ ٥ ٣/٢٥

∴ ن = ٦ أو ٧ أو ٨ أو .... أو ١٢٨

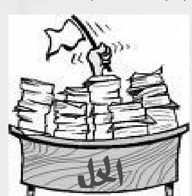
∴ أكبر الأكوام يحتوي على ٦ صناديق على الأقل .

∴ أكبر عدد صحيح ن بحيث ن صندوق على الأقل يجب أن تحتوي على نفس العدد من التفاح = ٦ .

١٣)إذا كانت س بقرة تعطي (س +١) صفيحة حليب في (س + ٢) يوماً . فكم عدد الأيام التي تأخذها (س + ٣) بقرة لتعطي (س+ ٥) صفيحة حليب ؟

● $\frac{\text{س}(\text{س}+٢)(\text{س}+٥)}{(\text{س}+١)(\text{س}+٣)}$ ○ $\frac{\text{س}(\text{س}+١)(\text{س}+٥)}{(\text{س}+٢)(\text{س}+٣)}$ ○ $\frac{(\text{س}+١)(\text{س}+٣)(\text{س}+٥)}{\text{س}(\text{س}+٢)}$

○ $\frac{(\text{س}+١)(\text{س}+٣)}{\text{س}(\text{س}+٢)(\text{س}+٥)}$ ○ كل ما سبق ليس صحيحاً.



نفرض أن عدد البقر = ر ، وعدد الصفائح = ح ، وعدد الأيام = م

∵ ح تتناسب طردياً مع ر عند ثبوت م

∵ ح تتناسب طردياً مع م عند ثبوت ر

∴ ح تتناسب طردياً مع م ، ر معاً

∴ ح = ٢ م ر حيث ٢ ثابت

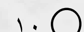
∴ (س +١) = ٢ س (س +٢)

، (س +٥) = ٢ (س +٣) × م

بالقسمة ∴ $\frac{\text{س}+١}{\text{س}+٥} = \frac{\text{س}(\text{س}+٢)}{(\text{س}+٣)\times\text{م}}$

∴ م = $\frac{\text{س}(\text{س}+٢)(\text{س}+٥)}{(\text{س}+١)(\text{س}+٣)}$

١٤)إذا كانت مقادير الزوايا الداخلة لمضلع محدب في توال عددي وكان مقدار أصغر هذه الزوايا = ١٠٠° ومقدار أكبر هذه الزوايا = ١٤٠° فإن عدد أضلاع المضلع يساوي .

● ٦  ٨  ١٠ ○ ١١  ١٢



نفرض أن عدد الأضلاع = ن

∴ مجموع الزوايا = (٢ ن – ٤) × ٩٠° ---------------------١

، ∵ جـ = $\frac{١}{٢}$ ن (٢ + ل) حيث ٢ الحد الأول ، ل الحد الأخير ، جـ مجموع المتوالية

∴ مجموع الزوايا = $\frac{١}{٢}$ ن (١٠٠° + ١٤٠°) = ١٢٠° ن ---------------------٢

من (١) ، (٢) ∴ (٢ ن – ٤) × ٩٠° = ١٢٠° ن

∴ ن = ٦

١٥)إذا كانت باقي قسمة كل من الأعداد ١٠٥٩ ، ١٤١٧ ، ٢٣١٢ على م هو ر حيث م عدد صحيح أكبر من ١ فإن : م − ر يساوي :−

○ ١ ● ١٥ ○ ١٧٩ ○ م − ١٥ ○ م − ١

الحل

باقي قسمة ١٠٥٩ على م هو ر

∴ ١٠٥٩ = م ن١ + ر حيث ن١ عدد صحيح ---------------١

بالمثل ١٤١٧ = م ن٢ + ر حيث ن٢ عدد صحيح ---------------٢

، ٢٣١٢ = م ن٣ + ر حيث ن٣ عدد صحيح ---------------٣

بطرح (١) من (٢) ∴ ٣٥٨ = م (ن٢ − ن١)

بطرح (٢) من (٣) ∴ ٨٩٥ = م (ن٣ − ن٢)

∵ كل من (ن٢ − ن١) ، (ن٣ − ن٢) عدد صحيح

∴ م عامل مشترك للعددين ٣٥٨ ، ٨٩٥ ---------------٤

∵ ٣٥٨ = ٢ × ١٧٩ ، ٨٩٥ = ٥ × ١٧٩

∴ العددان ٣٥٨ ، ٨٩٥ لهما عاملان مشتركان هما ١ ، ١٧٩ ---------------٥

من (٤) ، (٥) ∴ م = ١ أو م = ١٧٩

∵ م > ١ فرضاً ∴ م = ١٧٩

وبقسمة ١٠٥٩ على ١٧٩ نجد أن خارج القسمة ٥ والباقي ١٦٤ ∴ ر = ١٦٤

∴ م − ر ١٧٩ −١٦٤ = ١٥

١٦)في المثلثين ﻫ ب ج ، د ﻫ و إذا كانت أطوال الأضلاع ﻫ ج ، ب ج ، د و ، ﻫ و متساوية ، طول ﻫ ب ضعف طول ارتفاع المثلث د ﻫ و النازل من و على د ﻫ فأي التقارير الآتية يكون صواباً .

I. ∠ ﻫ ج ب ، ∠ د و ﻫ يجب أن يكونا متتامتين .

II. ∠ ﻫ ج ب ، ∠ د و ﻫ يجب أن يكونا متكاملتين .

III. مساحة المثلث ﻫ ب ج يجب أن تساوي مساحة المثلث د ﻫ و.

IV. مساحة المثلث ﻫ ب ج يجب أن تساوي ضعف مساحة المثلث د ﻫ و.

○ (II) فقط ○ (III) فقط ○ (VI) فقط ○ (I) ، (III) فقط ● (II) ، (III) فقط



نسقط ج س ⊥ ﻫ ب فتكون س منتصف ﻫ ب

، ∵ وص = $\frac{1}{2}$ ﻫ ب ∴ ﻫ س = و ص

المثلثان القائما الزاوية ﻫ س ج ، و ص د يتطابقان وينتج أن

∠١ = ∠٣

∵ ∠ ٢ تتمم ∠ ﻫ

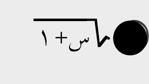
∴ ∠٣ تتمم ∠٢

∴ ∠ ﻫ ج ب تكمل ∠ د و ﻫ

وينتج أيضاً من التطابق أن المثلثين ﻫ س ج ، و ص د متساويان في المساحة.

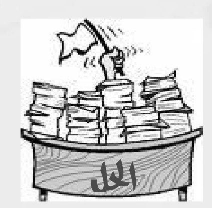
∴ المثلثان ﻫ ب ج ، د ﻫ و متساويان في المساحة.

١٧)إذا كانت ﻫ زاوية حادة وكان جا٢ ﻫ = س فإن : جا ﻫ + جتا ﻫ يساوي :−



● $\sqrt{س+١}$ ○ $(\sqrt{٢} - ١)^2 + ١$ ○ $\sqrt{س+١} - \sqrt{س^2-س}$

○ $\sqrt{س+١} + \sqrt{س^2-س}$ ○ $\sqrt{س+١} + س^2 - س$



$(جا ﻫ + جتا ﻫ)^2 = ١ + ٢ جا ﻫ جتا ﻫ = ١ + جا ٢ ﻫ = ١ + س$

∴ جا ﻫ + جتا ﻫ = ± $\sqrt{١+س}$

∵ ﻫ حادة ∴ جا ﻫ = $\sqrt{١+س}$

١٨)في الشكل المقابل : ؟ ب يمس الدائرة التي مركزها و في نقطة ؟

النقطة د تقع داخل الدائرة ، د ب يقطع الدائرة في جـ إذا كان :

ب جـ = د جـ = ٣ ، و د = ٢ ، ؟ ب = ٦ .

فإن نصف قطر الدائرة =

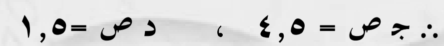
○ ٣ + $\sqrt{٣}$ ○ $\frac{١٥}{ط}$ ○ $\frac{٩}{٢}$ ○ ٢$\sqrt{٦}$ ● $\sqrt{٢٢}$



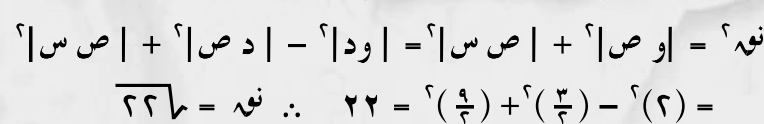
نمد ب جـ على استقامته حتى يلاقي الدائرة في س ، ونسقط العمود وص على جـ س ثم نصل و س

∵ $|؟ ب|^{٢}$ = ب جـ × ب س ∴ ٣٦ = ٣ × ب س ∴ ب س = ١٢

جـ س = ب س − ب جـ = ١٢ − ٣ = ٩



∴ جـ ص = ٤,٥ ، د ص = ١,٥

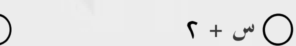


نق^{٢} = $|و ص|^{٢}$ + $|ص س|^{٢}$ = $|و د|^{٢}$ − $|د ص|^{٢}$ + $|ص س|^{٢}$

= $(٢)^{٢}$ − $(\frac{٣}{٢})^{٢}$ + $(\frac{٩}{٢})^{٢}$ = ٢٢ ∴ نق = $\sqrt{٢٢}$



١٩) ق(س) كثيرة حدود ، إذا قسمت على (س − ١) كان الباقي ٣ إذا قسمت على (س − ٣) كان الباقي ٥ فإذا قسمت ق(س) على (س − ١)(س − ٣) كان الباقي.



● س − ٢ ○ س + ٢ ○ ٢ ○ ٨ ○ ١٥



∵ (س − ١)(س − ٣) كثيرة حدود من الدرجة الثانية .

∴ ق(س) = (س − ١)(س − ٣) هـ(س) + ؟ س + ب حيث هـ(س) كثيرة حدود .

بوضع س = ١

ينتج أن : ق(١) = ؟ + ب

∴ ؟ + ب = ٣ ---------------١

بوضع س = ٣ ينتج أن : ق(٣) = ٣ ؟ + ب

∴ ٣؟ + ب = ٥ ---------------٢

بحل (١) ، (٢)

∴ ؟ = ١ ، ب = ٢

∴ الباقي = ؟ س + ب = س +٢

٢٠) إذا كان كل من ٩ ، ب ، س عدداً حقيقياً لا يساوي الواحد الصحيح فإن :

٤(لو٩ س)^{٢} + ٣(لوب س)^{٢} = ٨(لو٩ س)(لوب س)

○ لجميع قيم ٩ ، ب ، س　　○ إذا وفقط إذا كان : ٩ = ب^{٢}　　○ إذا وفقط إذا كان : ب = ٩^{٢}

○ إذا وفقط إذا كان : س = ٩ ب　　● كل ما سبق ليس صحيحاً.



٤(لو٩ س)^{٢} − ٨(لو٩ س)(لوب س) + ٣(لوب س)^{٢} = صفر　　　بالتحليل

(٢ لو٩ س − لوب س) (٢ لو٩ س − ٣لوب س) = صفر

∴ ٢ لو٩ س = لوب س　　أو　　٢ لو٩ س = ٣لوب س ------------------- ١

∵ لوب س = لو٩ س × لوب ٩ ------------------- ٢

من (١) ، (٢) ∴ ٢ لو٩ س = لو٩ س × لوب ٩　　أو　　٢ لو٩ س = ٣ لو٩ س × لوب ٩

∵ س ≠ ١　　∴ لو٩ س ≠ ٠

∴ ٢ = لوب ٩　　أو　٢ = ٣ لوب ٩

∴ ٩ = ب^{٢}　　أو　　٩^{٣} = ب^{٢}

٢١) أوجد أصغر عدد صحيح فردي ں يجعل حاصل الضرب : ٢$^{\frac{١}{٧}}$ × ٢$^{\frac{٣}{٧}}$ × ٢$^{\frac{٥}{٧}}$ × .... × ٢$^{\frac{١}{٧}(٢ن+١)}$

أكبر من ١٠٠٠؟

○ ٧　　● ٩　　○ ١١　　○ ١٧　　○ ١٩



مجموع الأسس = $\frac{١}{٧}$ [١ + ٣ + ٥ + ... (٢ ں + ١)]

نفرض أن عدد حدود المتوالية العددية ١ ، ٣ ، ٥ ، ....، ٢ ں + ١ يساوي م

∴ (٢ ں + ١) = ١ + (م − ١) ×٢

∴ م = ں + ١

∴ مجموع حدود هذه المتوالية = $\frac{١}{٢}$ (ں + ١) [١ + (٢ ں + ١)] = (ں + ١)^{٢}

∴ ٢$^{\frac{١}{٧}(ن+١)^{٢}}$ > ١٠٠٠

∴ $\frac{١}{٧}$ (ں + ١)^{٢} لو ٢ > لو١٠^{٣}

∴ $\frac{١}{٧}$ (ں + ١)^{٢} لو ٢ > ٣　　　بالضرب × ٧

$\therefore$ (ن + ١)^٢ لو ٢ > ٢١

$\therefore$ (ن + ١)^٢ > ٢١÷ لو ٢

$\therefore$ (ن + ١)^٢ > ٢١÷ ٠,٣٠١

$\therefore$ (ن + ١)^٢ > ٦٩

$\therefore$ (ن + ١)^٢ > ٨^٢

$\therefore$ ن + ١> ٨

$\therefore$ ن > ٧

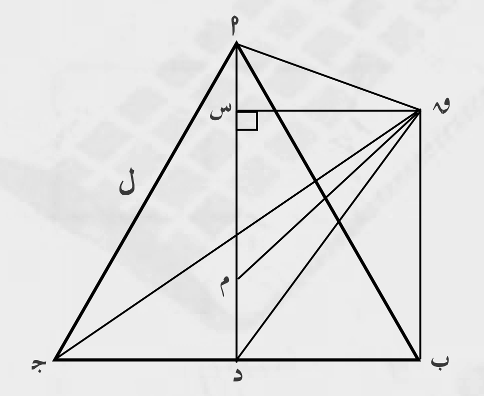
$\therefore$ ن = ٨ أو ٩ أو ١٠ أو ....

$\therefore$ أصغر عدد فردي يحقق المتباينة هو ن = ٩

٢٢) إذا أعطينا مثلثاً متساوي الأضلاع طول ضلعه ل وأوجدنا المحل الهندسي للنقطة ن التي تقع في مستوى المثلث ، والتي مجموع مربعات أبعادها عن رؤوس المثلث يساوي عدداً ثابتاً ك فإن المحل الهندسي للنقطة ن:

- ● يكون دائرة إذا كان ك > ل^٢
- ○ يحوي ثلاث نقاط فقط إذا كان : ك =٢ ويكون دائرة إذا كان ك > ٢ ل^٢
- ○ يكون دائرة ذات نصف قطر موجب فقط إذا كان : ل^٢< ك <٢ ل^٢
- ○ يحوي على عدد محدود من النقط لجميع قيم ك
- ○ كل ما سبق ليس صحيحاً.





نفرض أن : د منتصف ب ج ، م مركز المثلث المتطابق الأضلاع

$\therefore$ م تقسم أ د بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس

$\therefore$ م د = $\frac{١}{٣}$ ل جا ٦٠° ، م أ= $\frac{٢}{٣}$ ل جا ٦٠°

$\because$ | ن أ|^٢ + (| ن ب|^٢ + | ن ج|^٢) = ك ---------------------------- ١

$\because$ | ن ب|^٢=| ن د|^٢-|ب د |^٢ -------------------------------٢

$\because$ | ن ج|^٢=| ن ب|^٢+ |٢ب د |^٢=| ن ب|^٢+٤|ب د |^٢=| ن د|^٢-|ب د |^٢+٤|ب د |^٢

=| ن د|^٢+٣ |ب د |^٢ -------------------------------٣

من (٢) ،(٣) في (١)

$\therefore$ | ن أ|^٢ + (| ن د|^٢-|ب د |^٢) + (| ن د|^٢+٣ |ب د |^٢) = ك

$\therefore$ | ن أ|^٢ + (٢ | ن د|٢+^{٢} |ب د |^٢) = ك ------------------------ ٤

من نظريتي الزاوية الحادة والزاوية المنفرجة

|ن أ|^{٢} = |م ن|^{٢} + |م أ|^{٢} ± ٢ م أ × م س -------------------------- ٥

|ن د|^{٢} = |م ن|^{٢} + |م د|^{٢} ± ٢ م د × م س -------------------------- ٦

من (٥)، (٦) في (٤)

∴ (|م ن|^{٢} + |م أ|^{٢} ± ٢ م أ × م س) ٢ + (|م ن|^{٢} + |م د|^{٢} ∓ ٢ م د × م س) ٢ + |ب د|^{٢}) = ك

∴ |م ن|^{٢} + |م أ|^{٢} ± ٢($\frac{٢}{٣}$ ل جا ٦٠°) × م س ٢ + |م ن|^{٢} + ٢|م د|^{٢} ∓ ٤($\frac{١}{٣}$ ل جا ٦٠°) × م س ٢ + |ب د|^{٢} = ك

∴ |م ن|^{٢} + |م أ|^{٢} ± $\frac{٤}{٣}$ ل جا ٦٠° × م س ٢ + |م ن|^{٢} + ٢|م د|^{٢} ∓ $\frac{٤}{٣}$ ل جا ٦٠° × م س ٢ + |ب د|^{٢} = ك

∴ |م ن|^{٢} + |م أ|٢ + ^{٢}|م ن|^{٢} + ٢|م د|٢ + ^{٢}|ب د|^{٢} = ك

∴ ٣|م ن|^{٢} + |م أ|^{٢} + ٢|م د|٢ + ^{٢}|ب د|^{٢} = ك

∴ ٣|م ن|^{٢} + ($\frac{٢}{٣}$ ل جا ٦٠°)^{٢} + ٢($\frac{١}{٣}$ ل جا ٦٠°)٢ + ^{٢}($\frac{١}{٢}$ ل)^{٢} = ك

∴ ٣|م ن|^{٢} + $\frac{٤}{٩}$ ل^{٢} جا^{٢} ٦٠° + $\frac{٢}{٩}$ ل^{٢} جا^{٢} ٦٠° + $\frac{١}{٢}$ ل^{٢} = ك

∴ ٣|م ن|^{٢} + $\frac{٤}{٩}$ × $\frac{٣}{٤}$ ل^{٢} + $\frac{٢}{٩}$ × $\frac{٣}{٤}$ ل^{٢} + $\frac{١}{٢}$ ل^{٢} = ك

∴ ٣|م ن|^{٢} + $\frac{١}{٣}$ ل^{٢} + $\frac{١}{٦}$ ل^{٢} + $\frac{١}{٢}$ ل^{٢} = ك

∴ ٣|م ن|^{٢} + ($\frac{١}{٣}$ + $\frac{١}{٦}$ + $\frac{١}{٢}$)ل^{٢} = ك

∴ ٣|م ن|^{٢} + ل^{٢} = ك

∴ ٣|م ن|^{٢} = ك − ل^{٢}

∴ |م ن|^{٢} = $\sqrt{\frac{١}{٣}(ك - ل^{٢})}$

فإذا كان : ك > ل^{٢} فإن النقطة ن تتحرك على محيط دائرة مركزها م ونصف قطرها = $\frac{١}{٣}$(ك − ل^{٢})

٢٣) إذا كان : $^{ن}ق_{ر} = (ن!) \div ر! \; (ن - ر)!$ حيث ر ، ن عددان صحيحان $١ \leqslant ر < ن$ فإن :

$\frac{ن - ٢ر - ١}{ر - ١} \times {}^{ن}ق_{ر}$ يكون عدداً صحيحاً

● لجميع قيم ر ، ن

○ لجميع قيم ر ، ن الزوجية ولكن ليس لجميع قيم ر ، ن

○ لجميع قيم ر ، ن الزوجية ولكن ليس لجميع قيم ر ، ن

○ عندما ر = ١ أو ر = ن = ١ ولكن ليس لجميع قيم ر ، ن الفردية

○ إذا كانت ن تقبل القسمة على ر ولكن ليس لجميع قيم ر ، ن الزوجية.

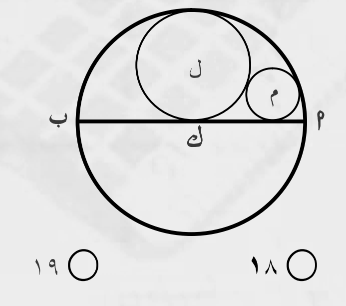


$$\frac{ن - ٢ر - ١}{ر - ١} = \frac{ن - ٢ر - ٢ + ١}{ر - ١} = \frac{(ن+١) - ٢(ر+١)}{ر - ١} = \frac{(ن+١)}{ر - ١} - ٢$$

$$\therefore \frac{ن - ٢ر - ١}{ر - ١} \times {}^{ن}ق_{ر} = \left(\frac{(ن+١)}{ر - ١} - ٢ \right) \times {}^{ن}ق_{ر} = \frac{ن+١}{ر - ١} \times {}^{ن}ق_{ر} - ٢ \times {}^{ن}ق_{ر}$$

$$= \frac{(ن+١)\,ن!}{(ر-١)\,ر!\,(ن-ر)!} - ٢ \times {}^{ن}ق_{ر} = \frac{(ن+١)!}{(ر+١)!\,\left((ن+١)-(ر+١)\right)!} - ٢ \times {}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن+١}ق_{ر+١} - ٢\;{}^{ن}ق_{ر}$$

= عدد صحيح – عدد صحيح = عدد صحيح لجميع قيم ر ، ن

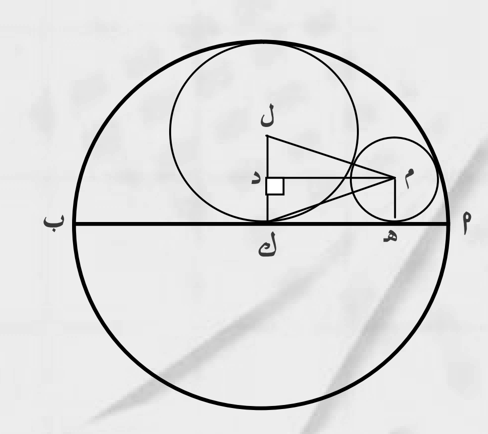


٢٤) في الشكل المقابل : م ب قطر في الدائرة ك والدائرة ل تمس الدائرة ك وتمس م ب في مركز الدائرة ك ، و الدائرة م تمس الدائرة ك و الدائرة ل والمستقيم م ب .

النسبة بين مساحة الدائرة ك ، ومساحة الدائرة م تساوي :

○ ١٢ ○ ١٤ ● ١٦ ○ ١٨ ○ ١٩





نفرض أن الدائرة م تمس م ب في هـ .

نصل م هـ ، ل ك ، م ل ، م ك ، نرسم م د عموداً على ل ك

نفرض أن نصف قطر الدائرة م = س

، وأن نصف قطر الدائرة ل = ص

∴ نصف قطر الدائرة ك = ٢ ص

∵ الدائرتين م ، ل متماستان من الخارج

∴ م ل = ص + س

∵ الدائرتين م ، ك متماستان من الداخل

∴ م ك = ٢ص − س

∵ د ك = م هـ = س

∴ ل د = ص − س

في △ م ك ل ∵ م د ⊥ ل ك

∴ | م ل |٢ − | م ك |٢ = | ل د |٢ − | د ك |٢

∴ (ص + س)٢ − (٢ص − س)٢ = (ص − س)٢ − س٢

ص٢ + ٢س ص + س٢ − ٤ص٢ + ٤س ص − س٢ = (ص٢ − ٢س ص + س٢) − س٢

ص٢ + ٢س ص − ٤ص٢ + ٤س ص = ص٢ − ٢س ص

− ٣ص٢ + ٦س ص = ص٢ − ٢س ص

٨س ص = ٤ص٢

∴ س = ½ ص

النسبة بين مساحتي الدائرتين ك ، م = ط (٢ص)٢ : ط (½ ص)٢

∴ النسبة بين مساحتي الدائرتين ك ، م = ١٦ : ١

٢٥) في المتتابعة: أ١ ، أ٢ ، ... سنعرف △١ (أن) = أن+١ − أن ، △ك (أن) = △١(△ك−١ (أن))

لكل ك > ١ ، فإذا كان : أن = ن٣ + ن فإن △ك (أن) = ٠ لجميع قيم ن .

- ○ إذا كانت ك = ١
- ○ إذا كانت ك = ٢ ولكن ليس إذا كانت ك = ١
- ○ إذا كانت ك = ٣ ولكن ليس إذا كانت ك = ٢
- ● إذا كانت ك = ٤ ولكن ليس إذا كانت ك = ٣
- ○ لا يوجد أي قيمة ك تحقق ذلك .



∵ △١ (أن) = أن+١ − أن

∴ △١ (أن) = (ن + ١)٣ + (ن + ١) − ن٣ − ن

= ن٣ + ٣ن٢ + ٣ن + ١ + ن + ١ − ن٣ − ن

= ٣ن٢ + ٣ن + ٢

∵ △٢ (أن) = △١ (△١ (أن)) = △١ (٣ن٢ + ٣ن + ٢)

= ٣(ن + ١)^{٢}+٣(ن + ١) + ٢ − ٣ ن^{٢}−٣ ن − ٢

= ٣ ن^{٢} + ٦ن+٣+٣ ن + ٣ + ٢ − ٣ ن^{٢}−٣ ن − ٢

= ٦ ن + ٦

= ٦ (ن + ١)

∴ $Δ^{٣}$ (أ$_{ن}$) = $Δ^{١}$ ($Δ^{٢}$ (أ$_{ن}$)) = $Δ^{١}$(٦ (ن + ١))

= ٦(ن + ١+١) − ٦ (ن + ١)

= ٦(ن +٢) − ٦ (ن + ١)

= ٦ ن +١٢ − ٦ن − ٦ = ٦

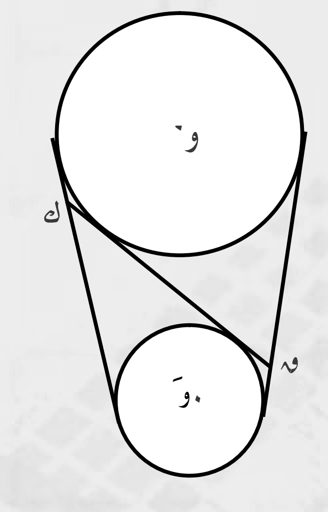
∴ $Δ^{٤}$(أ$_{ن}$) = $Δ^{١}$ ($Δ^{٣}$ (أ$_{ن}$)) = م^{١} (٦) = ٦ − ٦ = ٠

∴ $Δ^{٤}$(أ$_{ن}$) = ٠ لجميع قيم ن

∴ $Δ^{ك}$ (أ$_{ن}$) = ٠ لجميع قيم ن عندما ك=٤

٢٦) في الشكل المبين : حيث كل نقطة من الدائرة وَ تقع خارج الدائرة و ، النقطتان ه ، ك هما نقطتا تقاطع أحد المماسين المشتركين الداخلين مع المماسين المشتركين الخارجين .

طول هك



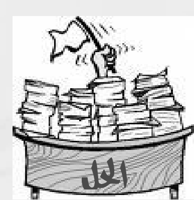
○ يساوي متوسط أطوال المماسات المشتركة الداخلية والخارجية .

○ يساوي طول أحد المماسين المشتركين الخارجتين إذا وفقط إذا كانت الدائرتان متساويتين.

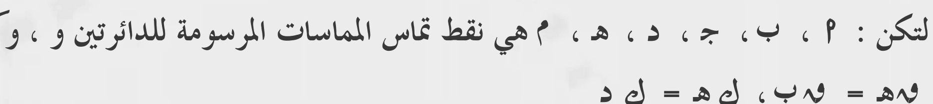
● يساوي دائما طول أحد الماسين المشتركين الخارجين .

○ أكبر من طول أحد الماسين المشتركين الخارجين.

○ يساوي الوسط الهندسي لأطوال المماسات المشتركة الداخلية والخارجية .







لتكن : أ ، ب ، ج ، د ، هـ ، م هي نقط تماس المماسات المرسومة للدائرتين و ، وَ

ه هـ = ه ب ، ك هـ = ك د

بالجمع ينتج أن : ه هـ + ك هـ = ه ب + ك د

∴ هك = ه ب + ك د بالمثل : هك = ه أ + ك ج

بالجمع : ٢هك = ه ب + ك د + ه أ + ك ج

∴ ٢هك = أ ب + ج د من السهل إثبات أن أ ب = ج د

∴ ٢هك = ٢ أ ب ∴ هك = أ ب

∴ هك يساوي دائماً طول المماس الخارجي المشترك

٢٧) إذا كان ن = $\left[\left(\sqrt{\sqrt{٥}+٢} + \sqrt{\sqrt{٥}-٢} \right) \div \left(\sqrt{\sqrt{٥}+١} \right) \right] - \sqrt{٣-٢\sqrt{٢}}$ فإن ن =

● ١　○ $٢\sqrt{٢} - ١$　○ $\sqrt{٥} \div ٢$　○ $\sqrt{\frac{٥}{٢}}$　○ كل ما سبق ليس صحيحاً.



نفرض أن : $م = \dfrac{\sqrt{\sqrt{٥}+٢} + \sqrt{\sqrt{٥}-٢}}{\sqrt{\sqrt{٥}+١}}$　∴ $م^٢ = \dfrac{٢\sqrt{٥} + ٢}{\sqrt{٥} + ١} = ٢$ (بالضرب في مرافق المقام)

وحيث أن كلاً من: $\sqrt{\sqrt{٥}+٢}$ ، $\sqrt{\sqrt{٥}-٢}$ ، $\sqrt{\sqrt{٥}+١}$ عدد موجب

∴ $م = \sqrt{٢}$

∴ $ن = م - \sqrt{٣-٢\sqrt{٢}} = \sqrt{٢} - \sqrt{(\sqrt{٢}-١)^٢} = \sqrt{٢} - (\sqrt{٢} - ١) = ١$

٢٨) المستقيمات : $ل_١$ ، $ل_٢$ ، .... ، $ل_{١٠٠}$ كلها مختلفة ، وكل المستقيمات $ل_{٤ن}$ ، حيث ن عـــدد صحيح موجب ، متوازية ، وكل المستقيمات $ل_{٤ن-٣}$ تمر بنقطة معلومة أ . أكبر عدد لنقط تقاطع أزواج المستقيمات التي تنتمي إلى المجموعة { $ل_١$ ، $ل_٢$ ، .... ، $ل_{١٠٠}$} هو :

○ ٤٣٥٠　● ٤٣٥١　○ ٤٩٠٠　○ ٤٩٠١　○ ٩٨٥١



أكبر عدد لنقط تقاطع أزواج مستقيمات عددها ١٠٠ = $^{١٠٠}ق_٢$ = ٤٩٥٠

المستقيمات $ل_{٤ن}$ عددها ٢٥ مستقيماً ، والمستقيمات $ل_{٤ن-٣}$ عددها ٢٥ مستقيماً.

وجود المستقيمات $ل_{٤ن}$ المتوازية ينتج عنه نقص أكبر عدد لنقط تقاطع أزواج المستقيمات عن ٤٩٥٠ بمقدار $^{٢٥}ق_٢$ نقطة أي بمقدار ٣٠٠ نقطة

وجود المستقيمات $ل_{٤ن-٣}$ المتقاطعة في نقطة ينتج عنه نقص أكبر عدد لنقط تقاطع لأزواج المستقيمات عن ٤٩٥٠ بمقدار ($^{٢٥}ق_٢$ − ١) نقطة أي بمقدار ٢٩٩ نقطة.

∴ أكبر عدد لنقط تقاطع أزواج المستقيمات التي تنتمي إلى المجموعة { $ل_١$ ، $ل_٢$ ، .... ، $ل_{١٠٠}$}

= ٤٩٥٠ − (٣٠٠ + ٢٩٩) = ٤٣٥١ نقطة

٢٩) قارنت آن و باربرا بين عمريهما فوجدتا أن عمر باربرا في الوقت الحاضر مثل عمر آن عندما كانت باربرا في مثل عمر آن في الوقت الذي كان فيه عمر باربرا يساوي نصف عمر آن الحالي .

فإذا كان مجموع عمريهما في الوقت الحاضر ٤٤ سنة فإن عمر آن يساوي.

○ ٢٢ ● ٢٤ ○ ٢٥ ○ **٢٦** ○ ٢٨

بإعادة صياغة معطيات المشكلة ينتج أن :

عمر باربرا في الوقت الحاضر = عمر آن منذ ن سنة = س سنة (مثلاً)

عمر باربرا منذ ن سنة = عمر آن منذ م سنة = ص سنة (مثلاً)

عمر باربرا منذ م سنة = $\frac{1}{2}$ عمر آن في الوقت الحاضر = ع سنة (مثلاً)

∴ عمر باربرا و آن في الوقت الحاضر هما س ، ٢ ع --------------------١

، عمرا باربرا وآن منذ ن سنة هما ص ، س --------------------٢

، عمرا باربرا وآن منذ م سنة هما ص ، ع --------------------٣

من (١) ، (٢)

∴ ص – س = س – ٢ ع --------------------٤

من (١) ، (٣) ∴ ع – س = ص – ٢ ع --------------------٥

∵ مجموع عمري باربرا وآن في الوقت الحاضر = ٤٤ سنة

∴ س + ٢ ع = **٤٤** --------------------٦

بحذف ص من (٤) ، (٥) ينتج أن ٣ س = ٥ ع --------------------٧

بحل (٦) ،(٧)

∴ س = ٢ ، ع = ١٢

∴ عمر آن في الوقت الحاضر = ٢ ع = ٢٤ سنة

٣٠) ما هو عدد الثلاثيات المرتبة (س ، ص ، ع) التي تحقق المعادلات :

س + ٢ ص + ٤ ع = ١٢

س ص + ٤ ص ع + ٢ س ع = ٢٢

س ص ع = ٦

○ لا يوجد أي ثلاثية. ○ ١ ○ ٢ ○ ٤ ● ٦



س + ٢ ص + ٤ ع = ١٢ ——————————— ١

س ص + ٤ ص ع + ٢ س ع = ٢٢ ——————————— ٢

س ص ع = ٦ ——————————— ٣

من (١) ∴ س + ٤ ع = ١٢ − ٢ ص ——————————— ٤

من (٢) ∴ ص (س + ٤ ع) + ٢ س ع = ٢٢ ——————————— ٥

من (٣) ∴ س ع = $\frac{٦}{ص}$ ——————————— ٦

بالتعويض من (٤) ، (٦) في (٥) ينتج أن :

ص (١٢ − ٢ ص) + $\frac{١٢}{ص}$ = ٢٢

∴ ١٢ ص − ٢ ص^{٢} + $\frac{١٢}{ص}$ = ٢٢ بالضرب × ص

∴ ١٢ ص^{٢} − ٢ص^{٣} + ١٢ = ٢٢ص ÷ −٢

∴ ص^{٣} − ٦ص^{٢} + ١١ص − ٦ = ٠ ——————————— ٧

∵ مجموع معاملات حدود الطرف الأيمن = ٠

∴ ص = ١ حل للمعادلة (٧)

ومن السهل إثبات أن الحلان الآخران للمعادلة (٧) هما ٢ ، ٣

∴ ص = ١ أو ٢ أو ٣

عندما ص = ١

من(٤) ∴ س + ٤ ع = ١٠

من(٦) ∴ س = ٦ أو ٤ ، ع = ١ أو $\frac{٣}{٢}$

∴ كل من الثلاثيتين (٦ ، ١ ، ١) ، (٤ ، ١ ، $\frac{٣}{٢}$) هي حل للمعادلات الثلاثة .

عندما ص= ٢

يمكن إثبات أن ع = $\frac{1}{2}$ أو $\frac{3}{2}$ ، **س = ٦ أو ٢**

∴ كل من الثلاثيتين (٢ ، ٢ ، $\frac{3}{2}$) ، (٦ ، ٢ ، $\frac{1}{2}$) هي حل أيضا للمعادلات المعطاة .

عندما ص= ٣

يمكن إثبات أن ع = $\frac{1}{2}$ أو **١** ، **س = ٤ أو ٢**

∴ كل من الثلاثيتين (٤ ، ٣ ، $\frac{1}{2}$) ، (٢ ، ٣ ، ١) هي حل للمعادلات المعطاة .

∴ يوجد ٦ ثلاثيات مرتبة (س ، ص ، ع) تحقق المعادلات

الحلول الكاملة

لمسابقة إقليدس – إحدى مسابقات جامعة ووتر لو الكندية – للصف الثالث الثانوي

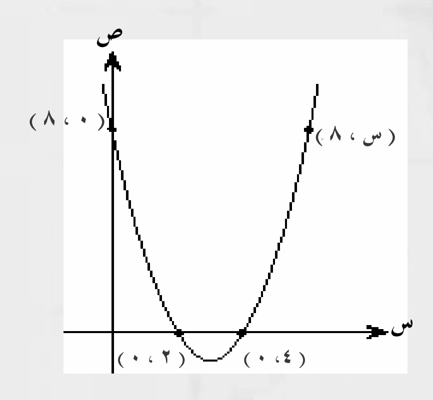
١٥ إبريل ٢٠٠٣

(١) على الشكل :

قطع مكافئ يقطع محور الصادات في (٠ ، ٨)

ويقطع محوري السينات في (٢ ، ٠) ، (٤ ، ٠)

ويمر بالنقطة (س ، ٨) . ما هي قيمة س .





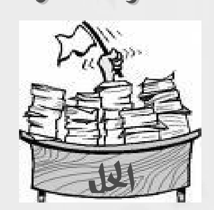
∵ القطع المكافئ يقطع محور السينات في النقاط ٢ ، ٤ على الترتيب

∴ معادلة محور تناظر القطع : س=٣

∴ النقطة (٠ ، ٨) هي صورة النقطة (س ، ٨) بالانعكاس عل محور التناظر : س=٣

∴ س = ٦

(٢) إذا كان للمعادلة : س^{2} + ٦س + ك = صفر لها جذران متساويان فما هي قيمة ك .



∵ للمعادلة جذران متساويان

∴ المقدار : س^{2} + ٦س + ك يمثل مربعاً كاملاً

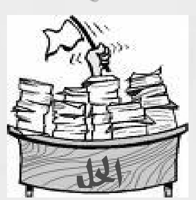
∴ مجموع الجذرين = معامل س = ٦

∴ الجذران : ٣ ، ٣

∵ حاصل ضرب الجذرين = ك

∴ ك= ٩

(٣) الخط المستقيم ص = ٢س +٢ يقطع القطع المكافئ ص = $س^٢$ – ٣س + ج في نقطتين أحد هذين النقطتين (١ ، ٤) أوجد إحداثيات النقطة الأخرى.



∵ النقطة (١ ، ٤) تقع على القطع المكافئ

∴ ٤ = $١^٢$ –٣ × ١ + ج

∴ ج = ٦

معادلة القطع المكافئ : ص = $س^٢$ – ٣س +٦

∵ ص = ٢س +٢

∴ ٢س +٢ = $س^٢$ – ٣س +٦

∴ $س^٢$ – ٥ س +٤ = ٠

∴ (س – ٤) (س – ١) = ٠ ∴ س = ٤ أو س = ١

∴ بالتعويض في معادلة المستقيم : ص= ١٠

∴ إحداثيات النقطة الأخرى هي (٤ ، ١٠)

(٤) إذا كانت : ٠° < هـ < ٩٠° ، ٣ جا هـ – جتا ١٥° = صفر ، فما هي قيمة هـ لأقرب جزء من عشرة من الدرجة .



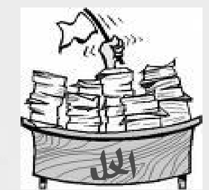
∵ ٣ جا هـ – جتا ١٥° = صفر

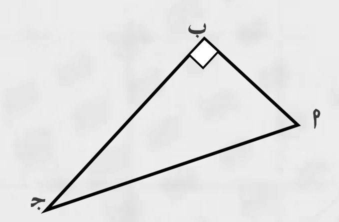
∴ جا هـ = $\frac{١}{٣}$ جتا ١٥° ∴ جا هـ = ٠,٣٢٢٠

∴ هـ = ١٨,٨°

(٥) على الشكل : △ أ ب جـ قائم الزاوية في ب ، | أ جـ | = ٢٠ سم ،

إذا كان جا جـ = $\frac{٣}{٥}$ فما هو | ب جـ | .



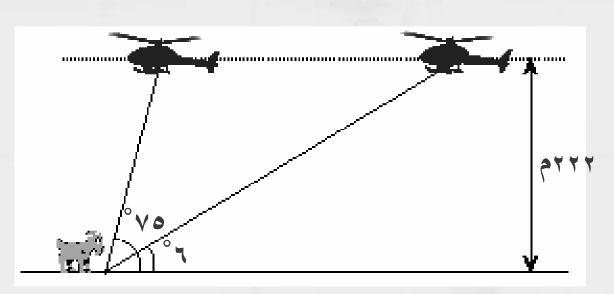


∵ جا جـ = $\frac{أ ب}{أ جـ}$ ∴ أ ب = أ جـ جا جـ = ٢٠ × $\frac{٣}{٥}$ =١٢

من نظرية فيثاغورث : $|ب جـ|^٢$ = $|أ جـ|^٢$ – $|أ ب|^٢$

∴ $|ب جـ|^٢$ = ٤٠٠–١٤٤=٢٥٦ ∴ | ب جـ | = ١٦سم

(٦) تتحرك طائرة هيلوكبتر على ارتفاع عمودي من أرض مسطحة قدرة٢٢٢م بسرعة ثابتة رصدت الطائرة إحدى الماعز بزاوية قدرها٦°وبعد دقيقة واحدة رصدها مرة ثانية بزاوية قدرها ٧٥ °.
إذا كانت الطائرة لم تعبر الهدف به فكم كانت سرعة الطائرة .

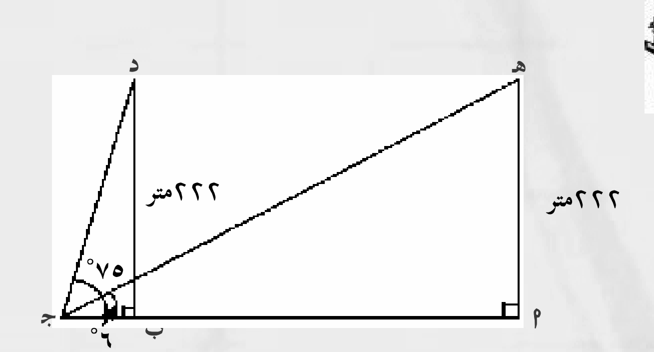


الحل

نفرض أن الماعز يقف عند النقطة ج

، هـ هي موقع الطائرة الأول ، د موقعها الثاني.

نقطة ب هي مسقط النقطة د على ا ج .



∵ ظا (٦°) = ا هـ / ا ج

∴ ا ج = ٢٢٢ ÷ ظا (٦°) = ٢١١٢,٩ متر

∵ ظا (٧٥°) = د ب / ب ج

∴ ب ج = ٢٢٢ ÷ ظا (٧٥°) = ٥٩,٤٨متر

∴ المسافة التي قطعتها الطائرة من هـ ← د = ٢١١٢,١٩ – ٥٩,٤٨= ٢٠٥٢,٧١متر = ٢,٠٥٢٧ كم

∴ المسافة التي تقطعها الطائرة في ساعة واحدة = ٢,٠٥٢٧× ٦٠ = ١٢٣,١٦٢ كم

∴ سرعة الطائرة = ١٢٣ كم / س

(٧) إذا كانت : د(٢ س + ٣) = ٢ د (س) + ٣ لكل س ، وكانت د(٠) = ٦ . فما قيمة د (٩) .



عند س = ٣

∴ د(٢ × ٣+ ٣) = ٢ د (٣) +٣

∴ د(٩) = ٢ د (٣) +٣ ------------------- ١

عند س = ٠

∴ د(٢ × ٠ + ٣) = ٢ د (٠) +٣

∴ د(٣) = ٢ د (٠) +٣ بالضرب × ٢ والتعويض في (١)

∴ د(٩) = ٤ د (٠) + ٦ +٣

∴ د(٩) = ٤ ×٦ + ٦ +٣ = ٣٣

(٨) بفرض أن د (س) ، د (ص) تحقق النظام :

د (س) + ٣ د (ص) = س^{٢} + س+٦

٢د (س) +٤ د (ص) = ٢س^{٢} + ٤ لكل س

أوجد قيمة س التي تجعل د (س) = د (ص) .

د (س) + ٣ د (ص) = س^{٢} + س+٦ ------------------١

٢د (س) +٤ د (ص) = ٢س^{٢} + ٤ ------------------٢

بقسمة المعادلة (٢) على ٢

∴ د (س) +٢ د (ص) = س^{٢} +٢ ------------------٣

بطرح (٣) من (١)

∴ د (ص) = س +٤

∵ د (س) = س^{٢} +٢ – ٢ د (ص) = س^{٢} +٢ – ٢(س +٤) = س^{٢} – ٢ س – ٦

لإيجاد قيمة س التي تجعل د (س) = د (ص)

∴ س^{٢} – ٢ س – ٦ = س +٤

∴ س^{٢} – ٣ س –١٠= ٠ ∴ (س – ٥) (س + ٢) = ٠

∴ س = ٥ أو س = –٢

(٩) في أحدى سباقات التزلج على الجليد اشترك خمسة متسابقين بينهم كنديان ، إذا كانت الميداليات ستمنح لأول ثلاثة يصلون خط النهاية ، وكانت لجميع المتسابقين نفس الفرصة للفوز بأحد الميداليات الثلاثة ، فما هو احتمال أن لا يفوز أي كندي بأي ميدالية .



نفرض أن المتسابقين الخمسة هم : ﻫ ، ب ، ج ، د ، ﻫ ، وأن د ، ﻫ هما المتسابقان الكنديان

∴ هناك ٥!= ٥ × ٤ ×٣ ×٢ × ١ = ١٢٠ طريقة لترتيب المتسابقين عند خط النهاية.

لكي لا يفوز المتسابقان الكنديان د ، ﻫ بأي ميدالية يجب أن يحتلا المركزين الرابع أو الخامس و يحتل باقي المتسابقين ﻫ ، ب ، ج المراكز الثلاثة الأولى وتكون عدد الطرق لذلك : ٣! = ٣ × ٢ × ١ =٦ ، ٢! =٢ ×١ ، وتكون هناك ٢ × ٦ = ١٢ طريقة لعدم فوز أي كندي بأي ميدالية

ويكون احتمال أن لا يفوز أي كندي بأي ميدالية = $\frac{١٢}{١٢٠}$ = $\frac{١}{١٠}$

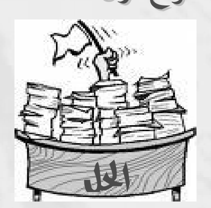
(١٠) أوجد عدد الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من أو يساوي ٣٠٠ والتي تكون مضاعف للعدد ٣ أو العدد ٥ وليست مضاعفاً للعدد ١٠ أو ١٥ .



∵ الأعداد التي تحقق الشروط في الــ٣٠ عدد صحيح الأوائل = ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ١٨ ، ٢١ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٢٧ = ١٠ أعداد.

∴ الأعداد التي تحقق الشروط في الــ٣٠٠ عدد صحيح الأوائل = ١٠ × ١٠ = ١٠٠ عدد.

(١١) في متسلسلة الأعداد الفردية التالية : ١+٣+٥−٧−٩−١١+١٣+١٥+١٧−١٩−٢١−٢٣ .... تتغير الإشارة كل ثلاثة حدود، أوجد مجموع أول ٣٠٠ حد من هذه المتسلسلة .



∵ مجموع أول ٦ حدود = ١+٣+٥−٧−٩−١١ = −١٨

∵ مجموع ثاني ٦ حدود = ١٣+١٥+١٧−١٩−٢١−٢٣ = −١٨

∴ مجموع كل ٦ حدود متتالية من المتسلسلة = −١٨

∵ عدد حدود المتسلسلة = ٥٠مجموعة × ٦ حدود

∴ مجموع أول ٣٠٠ حد من هذه المتسلسلة = ٥٠ × −١٨ = −٩٠٠

(١٢) عدد مكون من رقمين له خاصية أن عشرة أمثال آحاده زائد مربع عشراته يساوي عشرة أمثال عشراته زائد مربع آحاده ، أوجد جميع الأعداد الأولية المكونة من رقمين والتي تحقق الخاصية السابقة.



نفرض أن : آحاد العدد س ، وعشراته ص

∴ ١٠ س + ص^{2} = ١٠ ص + س^{2}

∴ ١٠ س + ص^{2} − ١٠ ص − س^{2} = ٠

∴ ص^{2} − س^{2} − ١٠ ص + ١٠ س = ٠

∴ (ص − س) (ص + س) − ١٠ (ص − س) = ٠

∴ (ص − س) [ص + س − ١٠] = ٠

∴ إما (ص − س) = صفر ومنها س = ص

أو [ص + س − ١٠] = ٠ ومنها ص + س = ١٠

∴ الأعداد المكونة من منزلتين وتحقق الشرطين السابقين = ١١ ، ٢٢ ، ٣٣ ، ٥٥ ، ٦٦ ، ٧٧ ، ٨٨، ٩٩ ، ١٩ ، ٢٨ ، ٣٧، ٤٦، ٥٥، ٦٤ ، ٧٣ ، ٨٢ ، ٩١.

∴ الأعداد الأولية من المجموعة السابقة = ١١ ، ١٩ ، ٣٧ ، ٧٣

(١٣) أوجد مجموعة حل النظام :

$$\text{لو}_{١٠}(\text{س}^{٣}) + \text{لو}_{١٠}(\text{ص}^{٢}) = ١١$$

$$\text{لو}_{١٠}(\text{س}^{٢}) - \text{لو}_{١٠}(\text{ص}^{٣}) = ٣$$



باستخدام القاعدتين : لو$_{١٠}$س + لو$_{١٠}$ص = لو$_{١٠}$ س ص ، لو$_{١٠}$س − لو$_{١٠}$ص = لو$_{١٠}$ $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$

∵ لو$_{١٠}$(س^{٣}) + لو$_{١٠}$(ص^{٢}) = ١١

∴ لو$_{١٠}$(س^{٣} ص^{٢}) = ١١

∴ س^{٣} ص^{٢} = ١٠^{١١} ------------------- ١

∵ لو$_{١٠}$(ص^{٣}) − لو$_{١٠}$ (س^{٢}) = ٣

∴ لو$_{١٠}$ $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ص}^{٣}}$ = ٣

∴ $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ص}^{٣}}$ = ١٠^{٣} ------------------- ٢

برفع قوى المعادلة (١) للقوى ٣

∴ س^{٩} ص^{٦} = ١٠^{٣٣} -------------------٣

برفع قوى المعادلة (٢) للقوى ٢

∴ $\frac{\text{س}^{٤}}{\text{ص}^{٦}}$ = ١٠^{٦} -------------------٤

بضرب (٤)× (٣) ∴ س^{٩} ص^{٦} × $\frac{\text{س}^{٤}}{\text{ص}^{٦}}$ = ١٠^{٣٣} × ١٠^{٦}

∴ س^{٩} = ١٠^{٣٩}

∴ س = ١٠^{٣} بالتعويض في ١٠^{٣} ∴ $\frac{(١٠^{٣})^{٤}}{\text{ص}^{٦}}$ = ١٠^{٦}

∴ ص^{٦} × ١٠^{٦} = $(١٠^{٣})^{٤}$ = ١٠^{١٢}

∴ ص^{٦} = ١٠$^{١٢-٦}$ = ١٠^{٦}

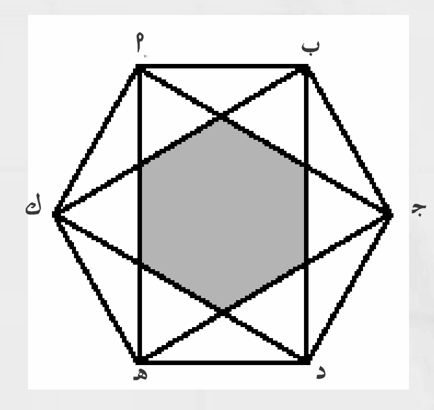
∴ ص = ١

∴ س = ١٠^{٣} ، ص = ١

(١٤) على الشكل : ا ب ج د هـ ك سداسي منتظم مساحة سطحه ٣٦ سم^2

مساحة سطح △ ا جـ هـ ∩ مساحة سطح △ ب د ك = سداسي منظم

أوجد مساحة الجزء المظلل .





نرمز للسداسي المنتظم الداخلي بالرموز : 

و بفرض أن طول ضلعه = س

∵ قياس ∠ ع ر ح = ∠ ر ح م = ١٢٠° (زاوية رأس السداسي المنتظم)

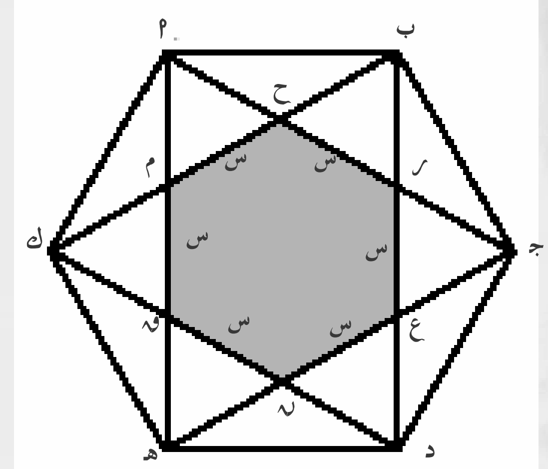
∴ ∠ ب ر ح = ∠ ب ح ر = ٦٠°

∴ △ ر ب ح متطابق الأضلاع وطول ضلعه س

بالمثل من الممكن إثبات أن المثلثات:

، ح ا م ، م ك و ، و هـ ن ، ن د ع ، ع ج ر

متطابقة الأضلاع ومتطابقة وطول ضلعها س



في △ ا م ك :

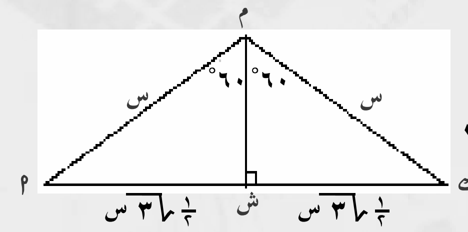
نرسم م ش ⊥ ا ك

∵ قياس ∠ ك م ا = ١٢٠°

∴ قياس ∠ ك م ش = ٦٠°

∴ ك ش = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ س

∴ ا ك = $\sqrt{3}$ س

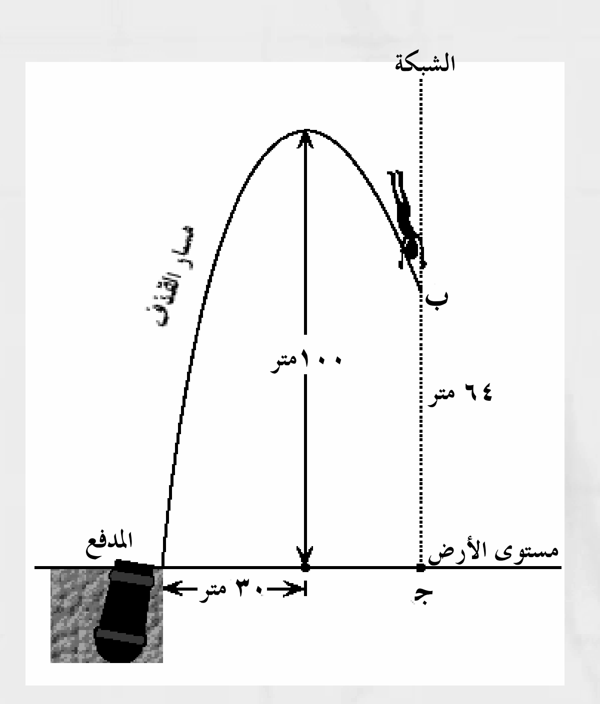


∴ طول ضلع السداسي الخارجي : طول ضلع السداسي الداخلي = $\sqrt{3}$: ١

∴ مساحة السداسي الخارجي : مساحة السداسي الداخلي = ٣ : ١

∵ مساحة السداسي الخارجي = ٣٦ سم^2

∴ مساحة السداسي الداخلي = ٣٦ × $\frac{1}{3}$ = ١٢ سم^2



(١٥) في بداية القرن كان السيرك يقدم فقرة خطيرة فيها يقوم المغامر بوضع نفسه داخل مدفع كبير مدفون جزئياً في الرمال (لأمان المشاهدين) ثم يقذفه المدفع فيكون مساره على شكل قطع مكافئ حتى يستقر على الشبكة العمودية كما في الشكل.
وفي حالتنا تلك أمسك المغامر الشبكة العمودية عند النقطة ب التي تبعد ٦٤ متر عمودياً عن سطح الأرض ، فإذا كان أقصى ارتفاع وصل إليه المغامر هو ١٠٠ متر عن سطح الأرض وكان مسقط نقطة أقصى ارتفاع على سطح الأرض تبعد عن فوهة المدفع ٣٠ متر .
فما هي المسافة الأفقية بين فوهة المدفع والشبكة (النقطة ج).



بوضع حركة المغامر على مستوي الإحداثيات المتعامدة حيث :
النقطة نقطة الأصل (٠ ، ٠) تمثل نقطة انطلاق المغامر
ومحور السينات يمثل المستوى الأفقي (الأرض)
∴ يصل المغامر أقصى ارتفاع عند النقطة (٣٠ ، ١٠٠)
وتكون معادلة محور تناظر المنحنى : س = ٣٠
∵ المنحنى يقطع محور السينات في : (٠،٠) ، (٦٠، ٠)
∴ س = ٠ ، س= ٦٠ جذران للمعادلة
معادلة المنحنى :ص = م(س-٠)(س-٦٠)
∴ ص= م س(س-٦٠)
∵ النقطة (٣٠،١٠٠) تقع على المنحني
∴ ٩٠٠= ٣٠× (٣٠-٦٠)
∴ م = $-\frac{١}{٩}$
∴ ص = $-\frac{١}{٩}$ س (س - ٦٠)
والآن علينا أن نحصل على الاحداثي السيني النقطة ج الذي إحداثيها الصادي = ٦٤
∴ ٦٤ = $-\frac{١}{٩}$ س (س - ٦٠)
∴ ٦٤ = $-\frac{١}{٩}$ (س^{٢} - ٦٠س) بالضرب × ٩

∴ ٥٧٦ = − س^{٢} + ٦٠س

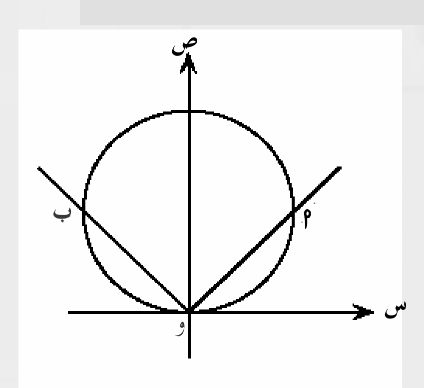
∴ س^{٢} − ٦٠س + ٥٧٦ = ٠

∴(س − ١٢)(س − ٤٨) =٠

∴ س= ١٢ مرفوض (اقل من نصف المسافة)

∴ س = ٤٨

∴ المسافة الأفقية بين فوهة المدفع شبكة الأمان = ٤٨ متر

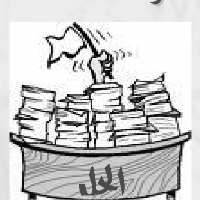


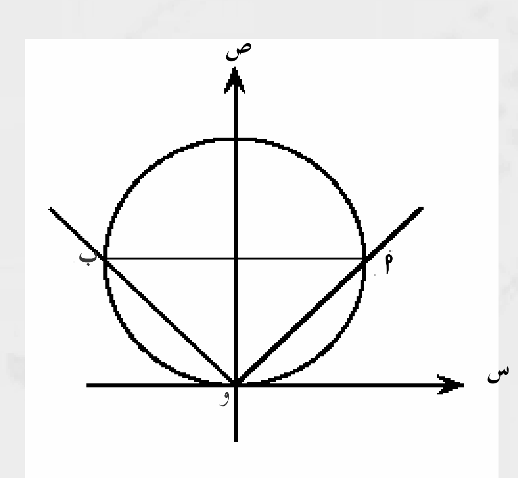
(١٦) على الشكل : دائرة مركزها يقع على محور الصادات

وتتقاطع مع المنحنى الذي معادلته ص = |س| في النقطتين م ، ب .

اثبت أن :

النسبة بين مساحة سطح المثلث م ب و : مساحة الدائرة = ١ : ط





∵ المنحنى : ص = |س| متماثل حول محور ص

، ∵ مركز الدائرة يقع على محور ص

∴ نفرض أن مركز الدائرة :(٠ ، ص)

طول نصف قطر الدائرة = ص

∵ المنحنيين يتقاطعان في ثلاث نقاط إحداهما عل المحور ص

∴ نقطي التقاطع الباقيتين متناظرتان حول ص

∴ إذا كان إحداثيات م(س ، ص) فإن إحداثيات ب(− س ، ص)

∵ ص = |س|

∴ إحداثيات م ، ب على الترتيب : (ص ، ص)(− ص، ص)

في Δ م ب و

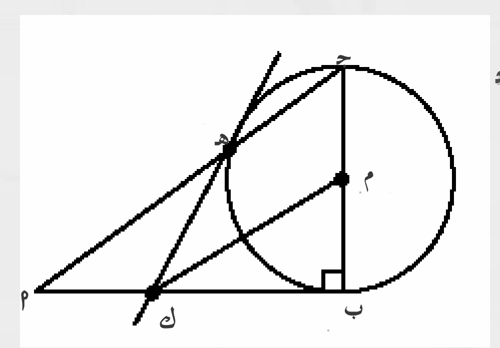
∵ |م ب| = $\sqrt{(ص+ص)^{٢}+(ص−ص)^{٢}}$ = ٢ص

∵ ارتفاع المثلث = ص

∴ مساحة سطح Δ م ب و = $\frac{١}{٢}$ × ٢ص ×ص = ص^{٢}

∵ مساحة سطح الدائرة = ط ص^{٢}

∴ النسبة بين مساحة سطح المثلث م ب و : مساحة الدائرة = ص^{٢} : ط ص^{٢} = ١ : ط





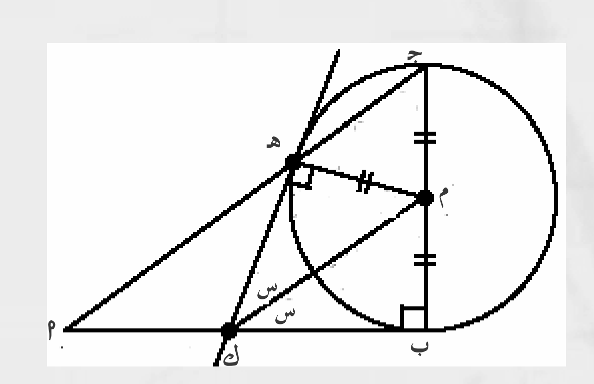
(١٧) على الشكل : ؠ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، م منتصف ب جـ

رسمت دائرة بحيث يكون ب جـ قطرها

إذا كان : ؠ جـ ∩ الدائرة = { هـ } ، ومماس الدائرة عند هـ

يقطع ؠ ب في ك . اثبت أن : ك م // ؠ جـ





∵ م منتصف ب جـ

∴ ب جـ قطر الدائرة

∴ م مركز الدائرة

نصل م هـ ، ونفرض أن ∠ م ك ب = س

∵ ك هـ مماس للدائرة

∴ م هـ ⊥ ك هـ

∵ م هـ = م ب   أنصاف أقطار لدائرة واحدة

∴ △ △ م ك ب ، م ك هـ يتطابقان

∴ ∠ م ك ب = ∠ م ك هـ = س   ---------------------- ١

∴ ∠ ك م ب = ∠ ك م هـ = (٩٠° – س)

∵ ∠ هـ م جـ = ١٨٠° –∠ ك م ب – ∠ ك م هـ

∴ ∠ هـ م جـ = ١٨٠° – (٩٠° – س) – (٩٠° – س)

∴ ∠ هـ م جـ = ١٨٠° – ٩٠° + س – ٩٠° + س

∴ ∠ هـ م جـ = ٢س

∵ △ م جـ هـ متطابق الضلعين

∴ ∠ جـ هـ م = ∠ م جـ هـ = ½ (١٨٠° – ٢ س) = (٩٠° – س)

∴ في △ ؠ ب جـ

∠ ؠ = ١٨٠° – ٩٠° – (٩٠° – س)

∠ ؠ = ١٨٠° – ٩٠° – ٩٠° + س = س   ---------------------- ٢

من (١)،(٢)

∠ ؠ = ∠ م ك ب   وهما في وضع تناظر

∴ ك م // ؠ جـ

(١٨) رباعي دائري أ ب ج د فيه أ ب = أ د = ١ ، ج د = جتا ∠ أ ب ج ، جتا ∠ ب أ د = − $\frac{١}{٣}$

أثبت أن : ب ج قطر في الدائرة المارة برؤوس الرباعي الدائري .



نفرض أن : د ج = س

∵ ج د = جتا ∠ أ ب ج ∴ ج د = جتا ∠ أ ب ج = س

∵ الشكل أ ب ج د رباعي دائري

∴ ∠ أ د ج = ١٨٠° − ∠ أ ب ج

∴ جتا ∠ أ د ج = − جتا ∠ أ ب ج = − س

∴ جتا ∠ أ ب ج = س

بالمثل : جتا ∠ ب ج د = − ∠ ب أ د = $\frac{١}{٣}$

في △ ب أ ج باستخدام قانون جيب التمام

∵ |أ ج|^{٢} = |ب أ|^{٢} + |ب ج|^{٢} − ٢ |ب أ| |ب ج| جتا أ ب ج ———————— ١

في △ أ د ج باستخدام قانون جيب التمام

∵ |أ ج|^{٢} = |د أ|^{٢} + |ج د|^{٢} − ٢ |د أ| |ج د| جتا أ ب د ———————— ٢

من (١)،(٢)

∴ |ب أ|^{٢} + |ب ج|^{٢} − ٢ |ب أ| |ب ج| جتا أ ب ج = |أ ج|^{٢} = |د أ|^{٢} + |ج د|^{٢} − ٢ |د أ| |ج د| جتا أ ب ج

∴ ١ + |ب ج|^{٢} − ٢ |ب ج| × س = ١ + س^{٢} − ٢ × س × − س

∴ |ب ج|^{٢} − ٢ |ب ج| س − ٣ س^{٢} = ٠ بالتحليل

∴ (|ب ج| − ٣ س) (|ب ج| + س) = ٠

∴ |ب ج| = ٣ س ، |ب ج| = − س مرفوض

في △ ب د ج باستخدام قانون جيب التمام

∵ |ب د|^{٢} = |د ج|^{٢} + |ج ب|^{٢} − ٢ |د ج| |ج ب| جتا ب ج د

∴ |ب د|^{٢} = س^{٢} + ٩ س^{٢} − ٢ × س × ٣ س × $\frac{١}{٣}$

∴ |ب د|^{٢} = ٨ س^{٢}

في △ ب د ج :

∵ |ب ج|^{٢} = |ب د|^{٢} + |ج د|^{٢}

∴ △ ب د ج قائم في ∠ د

∴ ب ج قطر في الدائرة المارة برؤوس الرباعي الدائري

الحلول الكاملة

لمسابقة فيرمات – إحدى مسابقات جامعة ووتر لو الكندية – للصف الثاني الثانوي

١٩ فبراير ٢٠٠٨م

الجزء الأول : ٥ درجات لكل فقرة.

(١) قيمة : $\frac{٤^{٢}+٣^{٢}+٢^{٢}+١^{٢}}{٣\times٢\times١}$ =

○ ١١٠ ○ ٢٢ ○ $\frac{٥٠}{٣}$ ● ٥ ○ ١٤



$\frac{٤^{٢}+٣^{٢}+٢^{٢}+١^{٢}}{٣\times٢\times١} = \frac{١٦+٩+٤+١}{٦} = \frac{٣٠}{٦} = ٥$

(٢) قيمة : ٦ $\left(\frac{٣}{٢}+\frac{٢}{٣}\right)$ =

● ١٣ ○ ٦ ○ $\frac{١٣}{٦}$ ○ $\frac{٢٠}{٣}$ ○ ٥



٦ $\left(\frac{٣}{٢}+\frac{٢}{٣}\right)$ = ٦ $\left(\frac{٩}{٦}+\frac{٤}{٦}\right)$ = ٦ × $\frac{١٣}{٦}$ = ١٣

(٣) إذا كان : ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + س = ٢١ + ٢٢ + ٢٣ + ٢٤ + ٢٥ فإن قيمة س =

○ ١١ ○ ٢١٠ ● ١٠٠ ○ ٢٠ ○ ٢٦



∵ ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + س = ٢١ + ٢٢ + ٢٣ + ٢٥

∴ س = ٢١ + ٢٢ + ٢٣ +٢٥ –١ – ٢ – ٣ – ٤ –٥

∴ س = ٢١ –١ + ٢٢ – ٢ + ٢٣– ٣ + ٢٤ – ٤ + ٢٥– ٥

∴ س = ٥ × ٢٠ = ١٠٠

(٤) شاحنة تزن ٩٦٠٠ كغم ، وعند تحميلها بعدد ٤٠ صندوق من الأجهزة يصبح وزنها ٣٨٠٠٠ كغم .

كم يكون وزن الصندوق الواحد .

○ ٤٦٠ كغم ○ ٩٥٠ كغم ○ ١١٩٠ كغم ○ ٢٤٠ كغم ● ٧١٠ كغم



وزن الصناديق = ٣٨٠٠٠−٩٦٠٠= ٢٨٤٠٠ كغم

وزن الصندوق الواحد = ٢٨٤٠٠÷ ٤٠ = ٧١٠ كغم

(٥) إذا كان : (١٨ ÷ √س) = ٢ فإن قيمة س =

● ٨١ ○ ٣٦ ○ ١٨ ○ ٩ ○ ٣



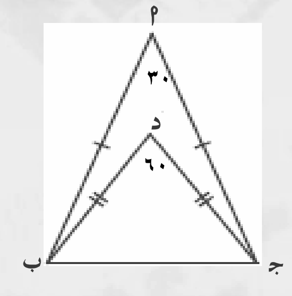
∵ (١٨ ÷ √س) = ٢

∴ ١٨ = ٢× √س

∴ √س = ٩ بالتربيع

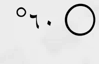
∴ س = ٨١

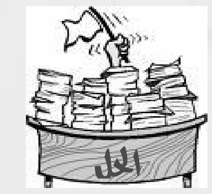

(٦) على الشكل المجاور : ∠ أ ب د =



○ ٤٥° ○ ٣٠° ○ ٦٠°

○ ٧٥° ● ١٥°





في Δ أ ب ج : ∵ أ ج = أ ب ، ∠ ب أ ج = ٣٠°

∴ ∠ أ ب ج = ½ (١٨٠° − ٣٠°) = ٧٥°

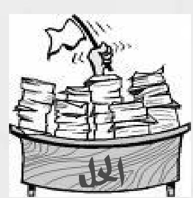
في Δ د ب ج : ∵ د ج = د ب ، ∠ ب د ج = ٦٠°

∴ ∠ د ب ج = ٦٠°

∴ ∠ أ ب د = ١٥°

(٧) إذا كان : س عدد صحيح فردي ، ص عدد صحيح زوجي فأي من الأعداد التالية فردياً.

○ ٢س + ٣ص ● ٣س + ٢ص ○ ٤س + ص ○ ٢(س + ٣ص) ○ س ص



∵ (٢س + ٣ص) عدداً زوجياً (لأن مضاعف س (العدد الفردي) يعطي عدداً زوجياً ، وثلاثة أضعاف العدد الزوجي ص يعطي عدداً زوجياً ، وبالتالي المجموع يكون زوجياً)

∵ (٣س +٢ ص) عدداً فردياً (لأن ثلاثة أضعاف س (العدد الفردي) يعطي عدداً فردياً، و مضاعف العدد الزوجي ص يعطي عدداً زوجياً ، وبالتالي المجموع يكون فردياً)

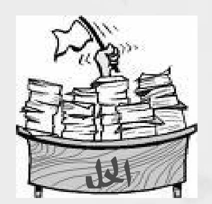
∴ (٣س +٢ ص) عدداً فردياً

(٨) إذا كان : م ب ج ، ء ل ن عددان صحيحان كل منهما مكون من ثلاثة أرقام وكان :

م ب ج
\+ ء ل ن
―――――
١ ٠ ٠ ٠

فإن قيمة : م +ب +ج + ء + ل + ن إذا كان م ، ب ، ج ، ء ، ل ، ن أعداد لا تساوي الصفر هي :

○ ١٠ ○ ١٩ ○ ٢١ ● ٢٨ ○ ٣٠



بغض النظر عن تغيير قيم الأعداد في المجموع : م +ب +ج + ء + ل + ن فإن ناتج الجمع لا يتغير ، دائما يكون : م +ب +ج + ء + ل + ن = ٢٨

فعلى سبيل المثال : ٤١٣ +٥٨٧ = ١٠٠٠

٣ + ١ + ٤ + ٧ + ٨ + ٥ = ٢٨

أو : ٨٨٩ + ١١١ = ١٠٠٠

١ +١ + ١ + ٨ + ٨ + ٩ = ٢٨

(٩) رشيد يستثمر $\frac{١}{٥}$ مدخراته في الشركة س ، ٤٢ ٪ في الشركة ص ، وباقي مدخراته في الشركة ع ، إذا كانت مساهمة رشيد في الشركة ص ١٠٥٠٠ دولار كندي ، فكم دولاراً مساهمته في الشركة ع .

○ ٢٥٠٠٠ دولار ○ ١٥٥٠٠ دولار ○ ١٤٠٠٠ دولار ● ٩٥٠٠ دولار ○ ٥٠٠٠ دولار



نفر أن مدخرات رشيد = ك

∴ مساهمة رشيد في الشركة س = $\frac{١}{٥}$ ك = $\frac{٢٠}{١٠٠}$ ك

∵ مساهمة رشيد في الشركة ص= ٤٢ ٪ ك = $\frac{٤٢}{١٠٠}$ ك

∴ مساهمة رشيد في الشركة ع = ك - ($\frac{٢٠}{١٠٠}$ك + $\frac{٤٢}{١٠٠}$ ك) = $\frac{٣٨}{١٠٠}$ ك

∵ مساهمة رشيد في الشركة ص ١٠٥٠٠ دولار كندي

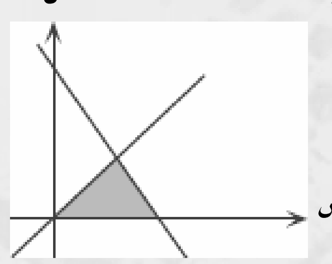
∴ $\frac{٤٢}{١٠٠}$ ك = ١٠٥٠٠

∴ مدخرات رشيد = ك = ١٠٥٠٠٠٠÷ ٤٢ = ٢٥٠٠٠ دولار كندي

∴ مساهمة رشيد في الشركة ع = $\frac{٣٨}{١٠٠}$ × ٢٥٠٠٠ =٩٥٠٠ دولار كندي

(١٠) علي الشكل المجاور : المساحة المحصورة بين محوري الإحداثيات والمستقيمان :

ص = -٢س+٣ ، ص = س تساوي :-



● $\frac{٣}{٤}$ ○ $\frac{٣}{٢}$ ○ $\frac{٩}{٤}$

○ $\sqrt{١٠}$ ○ ١



المنطقة المظللة تمثل مثلث إحدى رؤوسه (٠،٠)

∵ بحل معادلتي المستقيمان : ص = -٢س+٣ ، ص = س

∴ نقطة تقاطع المستقيمين (رأس المثلث الثانية) = (١ ، ١)

∴ ارتفاع المثلث = ١

الرأس الثالثة تمثل نقطة تقاطع المستقيم : ص = -٢س+٣ مع محور السينات (ص = ٠)= ($\frac{٣}{٢}$ ، ٠)

∴ طول قاعدة المثلث = $\frac{٣}{٢}$

∴ مساحة المنطقة المثلثة المظللة = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٣}{٢}$ × ١ = $\frac{٣}{٤}$

الجزء الثاني : ٦ درجات لكل فقرة.

(١١)إذا كان : $\frac{١}{س}$ = ٢ ، $\frac{١}{س}$ + $\frac{٣}{ص}$ = ٣ فإن قيمة: س+ ص =

○ ٣ ○ $\frac{٥}{٦}$ ○ $\frac{٧}{٣}$ ● $\frac{٧}{٢}$ ○ $\frac{٤}{٣}$



∵ $\frac{١}{س}$ = ٢

∴ ٢س = ١ ∴ س = $\frac{١}{٢}$

∵ $\frac{١}{س}$ + $\frac{٣}{ص}$ = ٣

∴ ٢ + $\frac{٣}{ص}$ = ٣

∴ $\frac{٣}{ص}$ = ١ ∴ ص = ٣

∴ س + ص = $\frac{١}{٢}$ + ٣ = $\frac{٧}{٢}$

(١٢)في سبع اختبارات النهاية العظمى ١٠٠ لكل منها درجة ، حصل وليد على الدرجات التالية : ٦٩، ٥٣ ، ٦٩ ،٧١ ، ٧٨ ، س ، ص . وكان متوسط درجات وليد٦٦ درجة ، وعليه تكون أقل قيمة ممكنة للدرجة س =

● ٢٢ ○ ٦٨ ○ ٦١ ○ ٥٣ ○ ٠



∵ متوسط درجات وليد = ٦٦

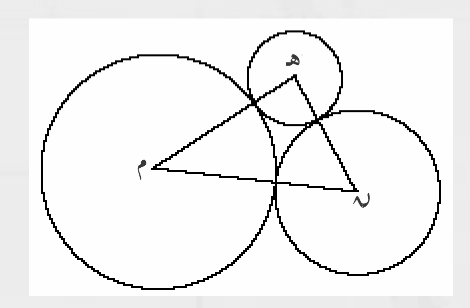
∴ درجات وليد في الاختبارات السبع = ٧ × ٦٦ =٤٦٢

∴ ٦٩ + ٥٣ + ٦٩+ ٧١ + ٧٨ + س + ص = ٤٦٢

∴ ٣٤٠ + س + ص = ٤٦٢

∴ س + ص = ٤٦٢ – ٣٤٠ = ١٢٢

إذا اعتبرنا أن وليد حصل على الدرجة ١٠٠ ، في الاختبار السادس أو السابع فإن أقل درجة ممكنة = ٢٢



(١٣) على الشكل : ثلاث دوائر متماسة من الخارج ،مراكزها :

م ، ن ، هـ أنصاف أقطارها على الترتيب ٣ ، ٢ ، ١

مساحة سطح △ أ ب جـ =

○ ١٢ ● ٦ ○ ٧,٥

○ ١٠ ○ ٤





∵ أنصاف أقطار الدوائر على الترتيب ٣ ، ٢ ، ١

م ن = ٣ + ٢ = ٥ ⟸ **| م ن |^{٢} = ٢٥**

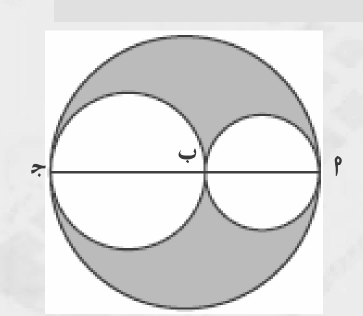
هـ ن = ٢ + ١ = ٣ ⟸ **| هـ ن |^{٢} =** ٩

م هـ = ٣ + ١ = ٤ ⟸ **| م هـ |^{٢} =** ١٦

∵ | م ن |^{٢} = | هـ ن |^{٢} + | م هـ |^{٢}

∴ △ م ن هـ قائم في هـ

∴ مساحة △ م ن هـ = $\frac{١}{٢}$ × ٣ × ٤ = ٦ وحدات مربعة



(١٤) على الشكل : ثلاث دوائر متماسة ، ب تقع على خط المركزين

للدائرتين الداخليتين إذا كان ب جـ = ١٢ ، أ ب = ٨.

فإن النسبة بين مساحة الجزء المظلل : مساحة الجزء غير المظلل =

○ ١٢ : ٢٥ ● ١٢ : ١٣ ○ ١ : ١

○ ١ : ٢ ○ ٢ : ٣.



∵ مساحة الدائرة التي قطرها أ ب = ط × ٤^{٢} = ١٦ ط وحدة مربعة.

∵ مساحة الدائرة التي قطرها ب جـ = ط × ٦^{٢} = ٣٦ ط وحدة مربعة.

∴ مساحة المنطقة الغير مظللة = ١٦ ط + ٣٦ ط = ٥٢ ط وحدة مربعة

∵ أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة

∴ قطر الدائرة الكبرى = ١٢ + ٨ = ٢٠

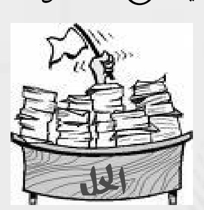
∵ مساحة الدائرة الكبرى= ط × ١٠^{٢} = ١٠٠ ط وحدة مربعة.

∴ مساحة المنطقة المظللة = ١٠٠ ط − ٥٢ ط = ٤٨ ط وحدة مربعة

∴ النسبة بين مساحة الجزء المظلل : مساحة الجزء غير المظلل = ٤٨ط : ٥٢ط = ١٢ : ١٣

(١٥) في إحدى سباقات العدو التتابعي قطع حازم الدورة الأولى في ٧٢ ثانية ، وقطع عمر الدورة الثانية بسرعة تساوي $\frac{٩}{١٠}$ سرعة حازم ، ثم جرى عبد الرحمن الدورة الثالثة بسرعة تساوي $\frac{٤}{٣}$ سرعة عمر ، وأخيراً جرى عبد العزيز بسرعة تساوي $\frac{٦}{٥}$ من سرعة عبد الرحمن . ما هو مجموع الزمن الذي حققه الفريق لأقرب ثانية .

○ ٤ دقائق ، ٤٨ ثانية ● ٤ دقائق ، ٢٢ ثانية ○ ٥ دقائق ، ٢٧ ثانية ○ ٤ دقائق ، ٣٧ ثانية ○ ٣ دقائق ،٤٦ ثانية



زمن عمر= ٧٢ × $\frac{١٠}{٩}$ = ٨٠ ثانية

زمن عبد الرحمن = ٨٠ × $\frac{٣}{٤}$ = ٦٠ ثانية

زمن عبد العزيز = ٦٠ × $\frac{٥}{٦}$ = ٥٠ ثانية

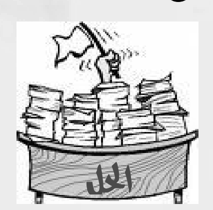
مجموع الزمن الذي حققه الفريق لأقرب ثانية = ٧٢ + ٨٠ + ٦٠ + ٥٠ = ٢٦٢ ثانية = ٤ دقائق ، ٢٢ ثانية

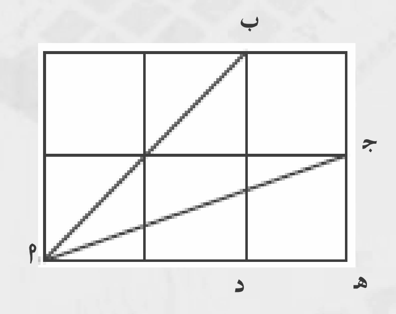
(١٦)على الشكل : ست مربعات متطابقة طول ضلعها ٢ سم ، رسم ٩ ب ، ٩ ج

أوجد قياس ∠ ب٩ ج بالدرجات لأقرب جزء من عشرة .

○ ١٥,٠° ○ ٢٥,٥° ● ٢٦,٦°

○ ٢٢,٥° ○ ٣٠,٠°





نضع الرموز كما بالرسم :

في △ ٩ د ب القائم في ∠ د

∵ ب د = ٩ د = ٤ سم

∴ ∠ ب د ٩ = ٤٥°

في △ ٩ هـ ج القائم في ∠ هـ

∵ جـهـ = ٢ سم ، ٩ هـ = ٣ × ٢ = ٦ سم

∴ ظا (∠ ج ٩ هـ) = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

∴ ∠ ج ٩ هـ ≈ ١٨,٤٣°

∴ ∠ ب٩ ج ≈ ٤٥° − ١٨,٤٣° = ٢٦,٥٧° = ٢٦,٦°

(١٧)علي الشكل : إذا كان ؟ ب ج Δ فيه د تقع على ب ج بحيث:

$\angle$ ؟ د ج = ١٢٠°، ؟ د = ١٢ ، ج د = ٨ ، ب؟ د = ٩٠°

فإن مساحة المثلث ؟ ب ج =

○ ٧٢√٣ ○ ٧٢ ○ ٣٦

○ ٣٦√٣ ● ٩٦√٣



نسقط ؟ هـ ⊥ ب ج

في Δ ؟ ب د القائم في $\angle$ ؟

∵ $\angle$ ؟ د ب = ١٨٠° - ١٢٠° = ٦٠° ∴ $\angle$ ب = ٣٠°

∴ ؟ د = $\frac{1}{2}$ ب د

∵ ؟ د = ١٢ ∴ ب د = ٢٤ ∴ ب ج = ٨ + ٢٤ = ٣٢

في ؟ هـ د القائم في $\angle$ هـ

؟ د = $\frac{1}{2}$√٣ × ١٢ = ٦√٣

∴ مساحة Δ ؟ ب ج = $\frac{1}{2}$ × ٣٢ × ٦√٣ = ٩٦√٣

(١٨) على الشكل : ؟ ب ج د مستطيل يستند على المستقيمان المتعامدان

و م ،م ك عند النقاط ؟ ، د ، إذا كان : ؟ ب = ١ متر ، ب ج = ٣

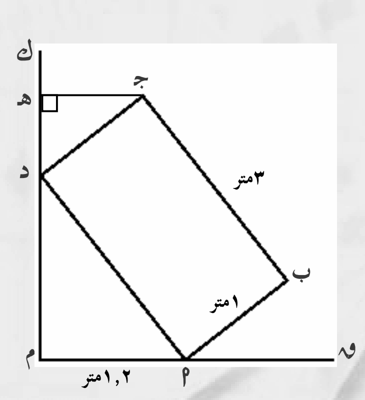
؟ م = ١,٢ متر ، فإن المسافة بين الرأس ج ، م و لأقرب جزء من مائة

من المتر تساوي .

○ ٢,٧٥ متر ○ ٣,٦٧ متر ● ٣,١٥ متر

○ ٣,٢٦ متر ○ ٣,٦٣ متر





نرسم جـهـ ⊥ ك م

∵ و م ⊥ ك م ∴ جـهـ // و م

∴ المسافة بين الرأس ج ، م و = هـ م

في Δ ؟ م د القائم في م

| م د |² = (٣)² – (١,٢)² = ٩ – ١,٤٤ = ٧,٥٦

∴ م د = √٧,٥٦

∵ $\angle$ هـ د جـ + $\angle$ جـ د م + $\angle$ م د م = ١٨٠°

∵ $\angle$ جـ د م = ٩٠°

∴ $\angle$ هـ د جـ + $\angle$ م د م = ٩٠°

∵ $\angle$ هـ د جـ + $\angle$ هـ جـ د = ٩٠°

∴ $\angle$ م د م = $\angle$ هـ جـ د

∴ $\triangle$ هـ جـ د يشابه $\triangle$ م د م

∴ $\frac{\text{هـ د}}{\text{م م}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{م د}}$

∴ $\frac{\text{هـ د}}{١,٢} = \frac{١}{٣}$

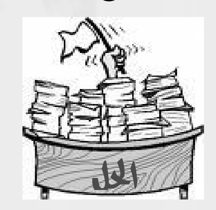
∴ هـ د = $\frac{١,٢}{٣}$ = ٠,٤ متر

∴ هـ م = $\sqrt{٧,٥٦}$ + ٠,٤ ≈ ٣,١٤٩٥ = ٣,١٥ متر تقريباً

الجزء الثالث : ٨درجات لكل فقرة.

(١٩) إذا كان الفرق بين مربعي عددين صحيحين متتالين ١٩٩ ، فإن مجموع مربعي هذين العددين يكون

● ١٩٨٠١ ○ ٣٩٦٠١ ○ ١٩٦٠٢ ○ ٢٠٢٠١ ○ ٤٠٥٣٠



نفرض أن العددين : س ، س + ١

∴ $(\text{س} + ١)^{٢} - \text{س}^{٢} = ١٩٩$

∴ $\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١ - \text{س}^{٢} = ١٩٩$

∴ ٢ س + ١ = ١٩٩

∴ س = ٩٩

العددان هما : ٩٩ ، ١٠٠

∴ مجموع مربعيهما = $٩٩^{٢} + ١٠٠^{٢}$ = ٩٨٠١ + ١٠٠٠٠ = ١٩٨٠١

(٢٠)متسلسلة حسابية كل حد فيها يساوي الحد السابق له مجموعاً على ثابت ، إذا كانت الأربع حدود الأولى هي : ٩ ، ٩٢ ، ب ، ٩ - ٦ - ب . فإن الحد رقم مائة من هذه المتسلسلة يساوي :

● -١٠٠ ○ -٣٠٠ ○ ١٥٠ ○ -١٥٠ ○ ١٠٠



نفرض أن الثابت = **س**

∴ ٩٢ - ٩ = - س

∴ ب - ٩٢ = - س

∴ ٩٢ - ٩ = ب - ٩٢

∴ ب = ٣ ٩

الحدود الأربع الأولى يمكن كتابتها على الصورة = ٩ ، ٩٢ ، ٩٣ ، ٩ - ٦ - ٩٣

= ٩ ، ٩٢ ، ٩٣ ، - ٦ - ٩٢

∴ أساس المتسلسلة في صورتها السابقة = ٩٢ - ٩ = ٩

∴ الحد الرابع = ٩٤

∴ - ٦ - ٩٢ = ٩٤

∴ ٩ = -١

∴ المتسلسلة تبدأ بالحدود : -١ ، -٢ ، -٣ ، -٤

∴ فإن الحد رقم مائة من هذه المتسلسلة = -١٠٠

(٢١) إذا كانت : ع = ١ + ١١ + ١٠١ + ١٠٠١ + ... + ١٠٠٠١.............١٠٠٠ (٥٠ صفر)

فإن ناتج جمع (ع) كعدد وحيد مجموع أرقامه يساوي :

● ٥٨ ○ ٩٩ ○ ٥٥ ○ ٥٠ ○ ١٠٣



∵ مجموع (ع) مكون من ٥٢ حد ∵ أكبر هذه الحدود (خمسون صفر بين ١ ، ١)

∴ عند جمع ٥٢ حد (آحاد كل منهم ١) يكون آحاد المجموع ١ ونحمل ٥ إلى منزلة العشرات

في منزلة عشرات المجموع لا يوجد سوى (١ فقط) وعليه تكون منزلة العشرات تحتوي العدد ٥ + ١ = ٦

وتكون باقي العدد المكون من ٥٢ رقم مكون من (خمسون ١)

∴ مجموع أرقام المجموع = ٢ + ٦ + (خمسون ١) = ٥٨

(٢٢) إذا كان : ص = $-\frac{١}{٨}$ س^{٢} + ٤ ، ص = س^{٢} − ك معادلتا قطعان مكافئان ، فإن قيم ك التي تجعل القطعان يتقطعان على المحور السيني أو يكونان فوقه تساوي :

○ ٩ ○ ٣٢ ○ ٣٣ ○ ٣٦ ● ٣٧

∵ ص = $-\frac{١}{٨}$ س^{٢} + ٤ ، ص = س^{٢} − ك

∴ $-\frac{١}{٨}$ س^{٢} + ٤ = س^{٢} − ك

∴ $\frac{٩}{٨}$ س^{٢} = ك + ٤

∵ س^{٢} $\geqslant$ ٠

∴ ك + ٤ $\geqslant$ ٠

∴ ك $\geqslant$ −٤ (الشرط الذي يجعل القطعان يتقاطعان)

نحاول الحصول على نقط التقاطع التي تجعل القطعان يتقاطعان على محور السينات أو فوقه والتي تجعل : ص $\geqslant$ ٠

∵ $\frac{٩}{٨}$ س^{٢} = ك + ٤

∴ س^{٢} = $\frac{٨}{٩}$ (ك + ٤)

∵ ص = س^{٢} − ك

∴ ص = $\frac{٨}{٩}$ (ك + ٤) − ك

∴ ص = $\frac{٨}{٩}$ ك + $\frac{٣٢}{٩}$ − ك

∴ ص = $\frac{٣٢}{٩}$ − $\frac{١}{٩}$ ك

∵ ص $\geqslant$ ٠

∴ $\frac{٣٢}{٩}$ − $\frac{١}{٩}$ ك $\geqslant$ ٠

∴ − $\frac{١}{٩}$ ك $\geqslant$ − $\frac{٣٢}{٩}$

∴ ك $\leqslant$ ٣٢

∴ قيم ك التي تجعل القطعان يتقطعان على المحور السيني أو يكونان فوقه تقع في : −٤ $\leqslant$ ك $\leqslant$ ٣٢

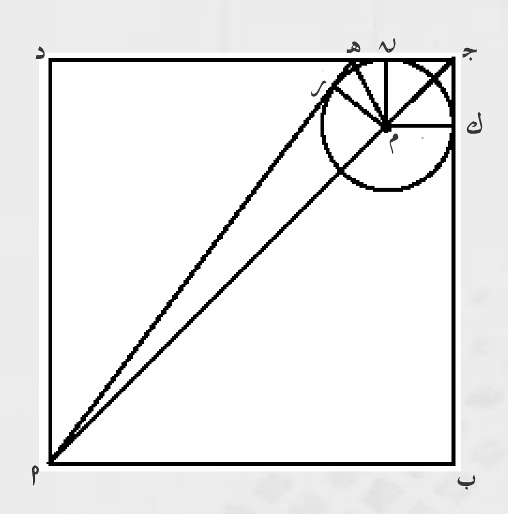
∴ عدد قيم ك = ٣٢ + ٤ + ١ = ٣٧

(٢٣) على الشكل : إذا كان أ ب ج د مربع طول ضلعه ٤ أمتار ، تقع النقطة م على قطره أ ج بحيث أ ج = ٤م ج ، رسمت دائرة مركزها م وتمس ضلعي المربع ج د ، ج ب ، كما رسم أ هـ مماس للدائرة يقطع المربع في النقطة هـ . فإن طول أ هـ لأقرب جزء من الألف من المتر يساوي .

○ ٤,١٣٢ متر　　○ ٤,٤٧٢ متر　　● ٤,٦٨٥ متر

○ ٤,٧٢٦ متر　　○ ٤,٧٦٧ متر

الحل



∵ طول ضلع المربع أ ب ج د = ٤ متر

∴ طول قطر المربع أ ج = ٤√٢ متر

∵ أ ج = ٤م ج

∴ م ج = √٢ متر

أ م = ٣√٢ متر

∵ ب ج يمس الدائرة م في ك

∴ م ك ⊥ ب ج

في △ م ك ج القائم في ∠ك

∵ ∠ م ج ك = ٤٥°

∴ م ك = ½√٢ × م ج

∴ م ك = = ½√٢ × √٢ = ١ متر

∵ م ك = م ر = نق = ١

∵ أ ر مماس للدائرة م

في △ أ م ر القائم في ∠ ر

∴ |أ ر|² = |أ م|² − |م ر|²

∴ |أ ر|² = ١٨ − ١ = ١٧

∴ أ ر = √١٧ متر

∵ جا∠ م أ ر = م ر / أ م = ١ / ٣√٢ ≈ ١٣,٦٣°

∵ ن هـ = هـ ر　　(مماسان للدائرة من نقطة واحدة)

∴ ∠ م هـ ر = ∠ م هـ ن　　(من تطابق △△ م هـ ر ، م هـ ن)

في △ أ هـ ج

∵ ∠ هـ أ ج + ∠ أ هـ ج + ∠ أ ج هـ = ١٨٠°

∴ ٢∠ م هـ ر ≈ ١٨٠° − ٤٥° − ١٣,٦٣° = ١٢١,٣٧°

∴ ∠ م هـ ر ≈ ٦٠,٦٨°

في △ م هـ ر

ظا∠ م هـ ر = $\frac{\text{م ر}}{\text{ر هـ}}$

∴ ر هـ = ١ ÷ ظا∠ م هـ ر

∴ ر هـ ≈ ٠,٥٦١٦

∴ أ هـ = أ ر + ر هـ = √١٧ + ٠,٥٦١٦ ≈ ٤,٦٨٤٧ ≈ ٤,٦٨٥ متر



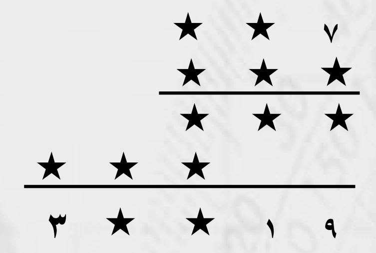


رياضيات ومرح



١- مسألة ضرب

حل المعلم مسألة الضرب أمام الفصل وطلب من طلابه دراستها ثم حلـها في الـدفاتر ، وخرج ولكن معلم الحصة التالية مسح السبورة قبل أن يتفهمها الطلاب ، فخاف الطلاب من أن يغضب منهم معلم الرياضيات ، وأحس بذلك المعلم الذي مسح السبورة فاضطر إلى إعادة كتابة ما تذكره من المسألة واضعاً نجوم بدل الأرقام التي نسيها .إليك المسألة :-



رجاء التفضل بإعادة كتابتها كاملة فمعلم الرياضيات لا يقبل الأعذار الواهية .

٢ - العملة الزائفة



سأل الضابط أحد الجنود : أين وضعت العملة الورقية الزائفة الـتي ضبطناها بالأمس؟

فرد الجندي : وضعتها في درج مكتبك .

ولما فتح الضابط درج مكتبه وجد أن هناك في نفس الدرج عملة حقيقية من نفس الفئة بجوار العملة الزائفة ، واحتار الضابط أيهما الحقيقية وأيهما الزائفة ، ولكن الضابط كان يعرف أن العملة الزائفة تقل في الوزن قليلاً عن الحقيقية ، واستطاع باستخدام زجاجة الحبر والمسطرة التي أمامه على المكتب أن يتعرف على العملة الزائفة . تُرى ماذا فعل الضابط بالضبط لكشف العملة الزائفة؟

٣- أجمع مائة رقم





عندما كان كارل فريدريك غاس في السادسة من عمره (في عام ١٧٨٣م) .طلب المعلم من الطلاب لأن يجمعوا كل الأرقان من ١ – ١٠٠.

ولسوء حظ المعلم ، الذي توقع أن يشغل السؤال الفصل لمدة طويلة ، كان لدى غاس الإجابة خلال ثواني .

لقد لاحظ وجود نمط ما استطاع به أن يوفر الإجابة عبر عملية بسيطة أجراها في ذهنه.

بالطبع مع ذهن مثل هذا لم يطل الأمر قبل أن يصبح غاس أحد أشهر علماء الرياضيات في ألمانيا . ترى ماذا فعل غاس لإنجاز المسألة في زمن بسيط ؟ .

٤-الأرقام المثالية

الرقم المثالي هو رقم يتشكل من مجموع من الأرقام التي يمكن قسمته عليها . بما في ذلك الرقم ١ ، ولكن باستثناء الــرقم نفسه .

الرقم المثالي الأول هو ٦، حيث يقبل القسمة على ٣ ، ٢ ، ١

والرقم ٦ هو مجموع الأرقام ١ + ٢ + ٣ ، وحتى الآن وجد علماء الرياضيات ٣٨ رقماً مثالياً . هل تعرف ما هو العدد المثالي التالي للعدد ٦ ؟

٥- ربما كان البائع معلم رياضيات



ذهب طالب إلى إحدى المكتبات ليشتري كتاباً ، وكان يعرف أن ثمن الكتاب

عدد صحيح من الريالات ، وأثناء وجود الطالب في المكتبة أعجبه قلم حبر

،فسأل البائع عن ثمنه فرد البائع قائلاً :- إن ثمن القلم يعادل ٣ أمثال ثمن الكتاب .

فقال الطالب :حسناً أعطني الكتاب والقلم . كم تريد ثمناً لهما ؟

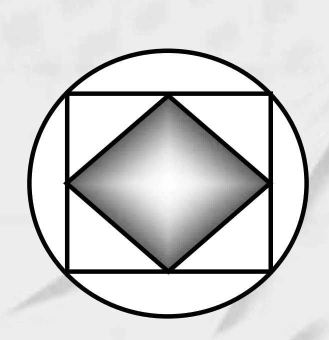
فقال البائع : حسابك بالريالات عدد صحيح مجموع أرقامه ١٤ ، ولم يناقشه الطالب بل أعطاه ورقة من فئة المائة ريال وتسلم الباقي وانصرف . كم كان ثمن القلم؟

٦- الرقم ٤

هل تستطيع أن تعبر عن الأرقام من : ٠ – ١٠ باستخدام معادلات تحتوي الرقم ٤ فقط ؟

يسمح لك باستخدام العمليات الأربعة والأقواس ، و لكن حاول أن تجد أقصر الطرق للتعبير عن كل رقم

٧- الزجاج المكسور



بغرفتي نافذة دائرة قطرها ٣٤ سم بداخلها ٣ مربعات وكنــت معجباً بجمال المربع الداخلي ذي اللون الأحمر القاني

،وفي ذات صباح بينما الأطفال يلعبون الكرة تحت نافذتي ، إذ قذف أحدهم الكرة بشدة فارتطمت بالمربع الداخلي وهشمته. كم سنتيمتراً مربعاً. من الزجاج تكفي لملء المربع.

٨ – الطفل الذكي

كان والد عبد الله يساعده في استذكار دروس الرياضيات، ودار بينهما الحوار التالي

عبد الله: إذا أضفت لا شيء إلى أي عدد فإن العدد لا يتغير، أليس كذلك يا أبي .

الأب: نعم يا عبد الله هذا صحيح.

عبد الله: وإذا طرحت لاشيء من عدد ظل العدد محتفظاً بقيمته الأصلية (عبد الله يتحدث عن الأعداد الموجبة).

الأب: (سره ذكاء ولده) وأجابه موافقاً.

عبد الله: وإذا ضربت صفراً في أي عدد فلابد أن يكون الناتج هو نفس العدد كما في الحالتين السابقتين.

الأب : كلا يا ولدي بل يكون الناتج صفراً .

(حاول الأب إقناع ولده كثيراً ولكنه يستطيع – فهل تستطيع أنت أخي العزيز أن تقنعه بذلك)



٩– بعد المباراة

اجتمع بعض الأصدقاء للاحتفال بفوز فريقهم في مباراة كرة القدم واتفقوا إن يوضع الحساب كله في كشف واحد ثم يقسم بالتساوي ، وبلغ ما أنفق على العشاء ٦٠ ريالاً ، وعند الدفع لوحظ أن اثنين منهم قد غادرا المكان دون أن يساهموا في دفع الحساب وبذا زاد نصيب كل من الموجودين مبلغ ٢٥٠ هللة

تُرى كم كان عدد الأصدقاء ؟.

١٠– حدود الأرقام

هناك خمس أرقام صحيحة مكونة من عدد واحد لكل منها يكون حاصل جمعها ٣٠ ، اثنان من هذه الأرقام الخمسة هما ١ ، ٨

إذا ضربت نفس هذه الأرقام الخمسة ببعضها يكون حاصل ضربها ٢٥٢٠.

هل تستطيع أن تحدد الأرقام الثلاثة الباقية ؟

$$\square + \square + \square + 1 + 8 = 30$$

$$\square \times \square \times \square \times 1 \times 8 = 2520$$

١١- التاجر الداهية

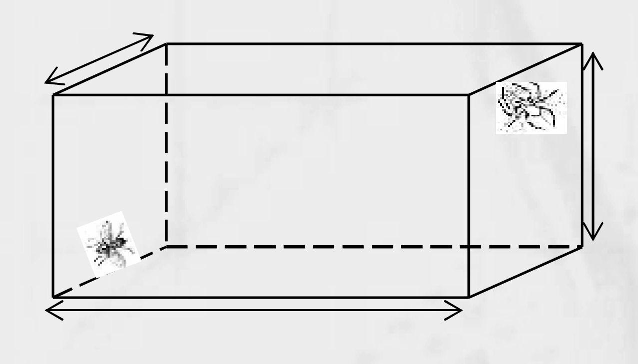
سمع التاجر زملاؤه يتهامسون في الهاتف فأعطى محاسب مؤسسته الأوامر التالية :

الاتصالات ٧٥٤١ - عربة الموز ٣٥٦٧٨٩١ – تشريعات ٦٢٧٣- كابرس ٢١٣٤ – ميكانيكية ٣١٨٩-

سلمان ٣٥- نادي الاتحاد ٢٦٩٣٤٣

ترى ماذا قال التاجر للمحاسب؟

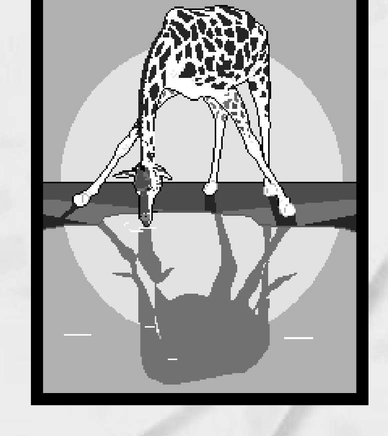
١٢- الذبابة في ضيافة العنكبوت



كان العنكبوت يسكن حجرة فسيحة مستطيلة الشكل أبعادها ٣٠، ١٢ ، ١٢ قدم وفي ذات مرة بينما هو يمشط شعره على أحد الحائطين الضيقين ، وعلى بعد قدم واحد من السقف وفي منتصف المسافة بين الحائطين العريضتين ، إذ لمح ذبابة تقف على الحائط الضيق المواجه لحائطه وعلى بعد قدم واحدة من الأرض وفي منتصف المسافة بين الحائطين العريضتين ، فخف لاستقبالها ووصل إليها عن طريق أقصر الطرق والتهمها .

ونحن نريد أن نعرف الطريق الذي سلكه العنكبوت والمسافة التي قطعها علماً بأن العناكب تسير على الجدران ولا تطير.

١٣- فرش للأرضية



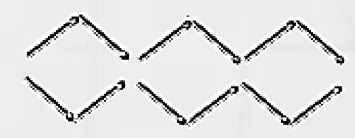
حجرة مكتبي مربعة الشكل مساحتها ١٤٤ قدماً مربعاً ، وأريد أن أغطي أرضيتها بفرش بني اللون ، ولكنني عندما ذهبت إلى تاجر المفروشات لم أجد سوى قطعة مستطيلة الشكل طولها ١٦ قدماً وعرضها ٩ أقدام وادعى التاجر أنه يستطيع أن يغطي الغرفة بها لو قطع الفرشة إلى قطعتين فقط وحيث أن لون الفرش ساده فلن يظهر مكان القطع بشكل واضح فوعدته بالتفكير في الأمر وانصرفت .

هل حقيقة يستطيع أن ينفذ التاجر وعده.

١٤- النقاط التسعة

كما يظهر على الشكل هناك تسع نقاط مرتبة على شكل مربع والمطلوب توصيل النقاط التسعة مع بعضها بالبعض باستخدام أربعة خطوط مستقيمة دون رفع القلم عن الورقة.

١٥- معينات



أعد ترتب أعواد الكبريت أعلاه لتكوين ٧ معينات

١٦- نصفان متشابهان

باستخدام خط مستقيم واحد وخط منحني

اقسم الشكل السابق لقسمين متماثلين ومتساويين في المساحة

١٧- فكر واستنتج

(١) بيت مريم سقفه أسود.

(٢) انتصار وحيدة أبويها .

(٣) بيت عائلة الخالد سقفه ليس أبيضاً.

(٤) فوزية أخت علي .

(٥) واحد على الأقل من عائلة الخالد لا يدخن .

(٦) علي السعد يحب الكولا .

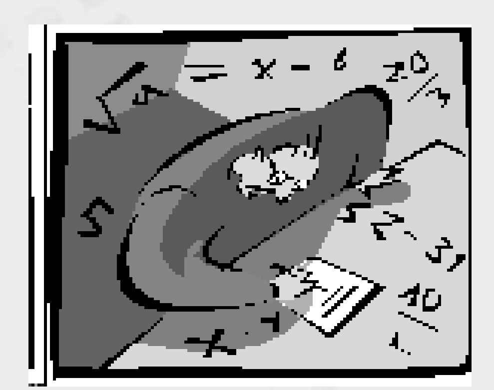
(٧) فوزية عمرها ٢١ سنة وتعيش في قرطبة .

(٨) علي عمره ١٧ سنة ويحب لعبة كرة السلة في الشارع.

(٩) أحد أفراد عائلة الخالد والسعد جيران .

(١٠) بنت عم فوزية تحب الرياضة .

(١١) سلوى الخالد عمرها ١٤ سنة .



(١٢) انتصار الخالد عمرها ١٤ سنة .

(١٣) الطبيب من عائلة الخالد يصرخ ويدخن كثيراً .

(١٤) جيران الخالد لديهم كلب ينبح كثيراً.

(١٥) انتصار تغضب أمها كثيراً .

(١٦) فوزية لديها أخ أسمه طلال.

(١٧) أحد أبناء السعد في عمر انتصار .

(١٨) بيت السعد هو آخر بيت في الحي.

(١٩) مريم هي بنت العم الوحيدة لانتصار.

(٢٠) جميع البيوت في مدينة قرطبة لها أسقف بيضاء أو سوداء فقط .

(٢١) يوجد بيت واحد جنوب بيت الخالد سقفه له لون مختلف عن باقي البيوت

(٢٢) الكلب الذي في بيت جنوب بيت الخالد اسمه سنوبي .

(٢٣) البيوت في مدينة أشبيلية أسقفها سوداء .

(٢٤) بينما كان أحد أفراد عائلة السعد وهو شخص لا يدخن يقود سيارته صدم شخصاً عمره ١٧ سنة يعيش جنوب بيت السعد بينما كان يلعب في الشارع .

ما الذي يمكن استنتاجه وما الذي لا يمكنك استنتاجه من المعلومات السابقة للإجابة على الأسئلة التالية .

(١) كلب من ينبح باستمرار؟

(٢) ما لون سقف بيت العائلة اللذين يملكون كلباً ينبح باستمرار؟

(٣) من هو الطبيب ؟

(٤) من الذي كان يقود السيارة ؟

(٥) من الذي صدمته السيارة ؟

(٦) أين تعيش مريم؟

١٨- الأجيال الأربعة



الجذر التربيعي للسنة التي ولد فيها جدي مضافاً إليه الجذر التربيعي للسنة التي ولد فيها ابني يعطيك عمر أول مدرسة أنشئت في قريتنا .
فكم عمرها الآن ومتى احتفلنا بمرور مائة عام على إنشائها.

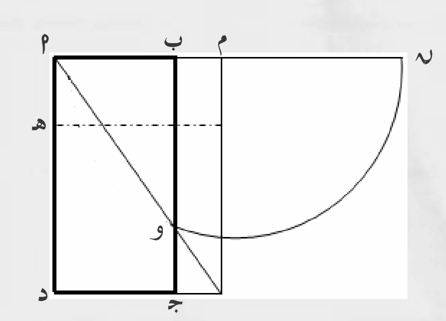
١٩- فريق فاشل



بعد خسارتهم في المباراة أشار المدرب إلى خليل (وهو أسوأ وأكسل لاعب في الفريق) قائلاً : لو كان عندنا خمسة مثل خليل لفزنا في المباراة ماذا حدث للمدرب . هل صار مجنوناً.



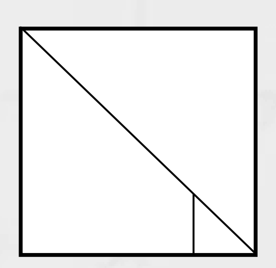
٣٠-التشريح الهندسي فن جميل



من العمليات الأساسية المعروفة في تشريح الهندسة المستوية هي عملية تحويل مستطيل إلى مربع .

وإليك الطريقة العامة موضحة بالرسم :- عندنا المستطيل أ ب ج د وعلينا أن نرسم مربعاً يساوي مساحة المستطيل

نوجد أولاً طول المربع المطلوب : نمد أ ب على استقامته إلى ن بحيث يكون أ ب + ب ن = أ ب + ب ج



ثم ننصف أ ن في م وبنصف قطر دائرة م ن ، نرسم قوساً يقطع ب ج في و فيكون ب و هو ضلع المربع المطلوب

؛خذ الطول أ هـ يساوي و ج ومن هـ ارسم مستقيماً يوازي د ج .

اجعل القطعة المثلثية أ ب و تنزلق لأسفل نحو اليمين حتى تقع و على امتداد د ج ثم انقل المثلث الأصغر

بحيث ينطبق أ هـ على و ج . هذا المربع الذي تكون أخيراً هو المربع المطلوب .



الإجابات :

(١)عملية الضرب كما كتبها معلم الرياضيات هي :

```
      ١١٧
      ٣٠٧
   ------
      ٨١٩
    ٣٥١
   ------
    ٣٥٩١٩
```

(٢) اعتبر الضابط زجاجة الحبر محور ارتكاز ،ووضع عليها المسطرة من منتصفها وعلى أحد طرفي المسطرة ووضع العملتين ،لتظهر الأخف وزناً وهي العملة المزيفة .

(٣) أدرك جاس أن سلسلة الأرقام :(١ + ٢ + ٣ + ... + ٩٧ + ٩٨ + ٩٩ + ١٠٠) يمكن كتابتها على الصورة [(١ + ١٠٠) + (٢ + ٩٩) + (٣ + ٩٨) + (٤ + ٩٧)..............(٥٠ + ٥١)] ومن السهل معرفة أن حاصل جمع كل قوس = ١٠١ وأن عدد الأقواس = ٥٠ قوساً ، أي أن ناتج السؤال = ٥٠ × ١٠١ = ٥٠٥٠.

(٤) الرقم المثالي التالي هو ٢٨ ، والذي يليه ٤٩٦.

(٥) نفرض أن ثمن الكتاب = س ∴ ثمن القلم = ٣س

∴ ثمن ما اشتراه الطالب = س + ٣ س = ٤ س (أي أن المبلغ المدفوع يجب أن يقبل القسمة على ٤ لأن ما دفعه الطالب كان مبلغاً صحيحاً)

∴ ٤س < ١٠٠ ريال.

∵ مجموع أرقام العدد الذي يمثل المبلغ الذي دفعة الطالب = ١٤

∵ الأعداد الأقل من ١٠٠ والتي مجموع أرقامها ١٤ هي (٥٩، ٦٨ ، ٧٧، ٨٦ ، ٩٥)

نلاحظ أن العدد الوحيد الذي يقبل القسمة على ٤ بين الأعداد السابقة هو ٦٨

∴ ثمن الكتاب = (٦٨ ÷ ٤) × ٣ = ٥١ ريال.

(٦)

٤ − ٤ = ٠	٤ ÷ ٤ = ١	(٤ + ٤) ÷ ٤ = ٢	٤ − (٤ ÷ ٤) = ٣
٤=٤	٤ + (٤ ÷ ٤) = ٥	((٤ + ٤) ÷٤) + ٤ = ٦	(٤٤ ÷ ٤) − ٤ = ٧
٤ + ٤ = ٨	٤ + ٤ + (٤÷ ٤) =٩	(٤٤ − ٤) ÷ ٤ = ١٠	

(٧) نفرض أن طول ضلع المربع الخارجي هو : ٢ س

∴ طول ضلع المربع الزجاجي = ٢√ س

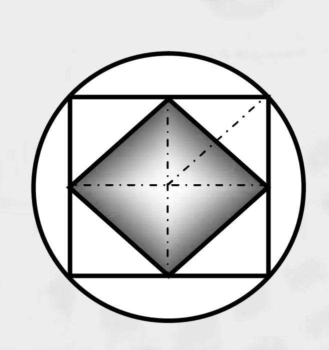
برسم محورين للمربع الزجاجي ينقسم إلى صغيرة طول ضلع كل منها = س

∴ طول قطر الدائرة = ٢√ س

∵ قطر الدائرة = ٣٤

∴ ٢ ٢√ س = ٣٤

∴ س = ١٧/٢ ٢√





∴ مساحة المربع الزجاجي = ١٧/٢ ٢√ × ١٧/٢ ٢√ = ١٤٤٫٥سم٢

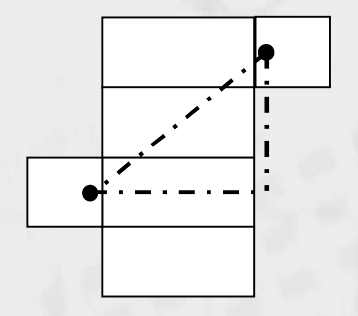
(٨) الضرب عملية تكرار ، وتكرار لا شيء لا يمكن أن يكون سوى الصفر

(٩) لنفرض أن عدد الأصدقاء قبل العشاء س ، فيكون س – ٢ عند دفع الحساب وتكون المعادلة هكذا : $\frac{٦٠٠٠}{س-٢} - \frac{٦٠٠٠}{س} = ٢٥٠$ ومنها عدد الأصدقاء = س= ٨ .

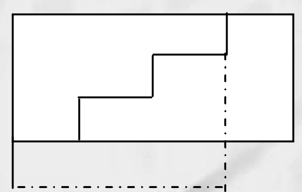
(١٠) من الواضح أن العدد ٢٥٢٠ يقبل القسمة على ٥ ، ١٠ ، ولكن بم أن جميع الأرقام يجب أن تتكون من عدد واحد فسوف نستثني الرقم ١٠ ، وبهذا يكون الرقم الثالث هو ٥ .
إذا جمعنا الأرقام المعروفة (٨ + ١ + ٥) يكون المجموع ١٤ ، وبما أن ٣٠-١٤ = ١٦
يكون مجموع الرقمين الباقيين ١٦ .
بضرب الأرقام المعروفة لدينا (٨ + ١ + ٥) يكون المجموع ٤٠ ، وبما أن ٢٥٢٠÷٤٠ = ٦٣ فإن ناتج ضرب الرقمين الباقيين هو ٦٣ .
فقط ٧ ، ٩ يكون مجموعهما ١٦ ، وحاصل ضربهما ٦٣
أي أن الجواب هو : ٥ ، ٧ ، ٩.

(١١) يكتب التاجر اسم ألسم ويعطي حروفه أرقاما من ١ إلى نهاية الكلمة فمثلا كلمة :
ا ل ا ت ص ل ا ت تماثل ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨
ثم يختار الحروف التي تكون الكلمة التي يريدها ولكنه لا يكتب الكلمة بل أرقام الحروف بحسب ورودها ، وهنا في كلمة الاتصالات يريد كلمة اتصل فيأخذ من أرقام هذه الحروف ١٤٥٧ ويعكسها وعليه تكون العبارة :

الكلمة السرية	الاتصالات	عربة الموز	تشريعات	كابرس	ميكانيكية	سلمان	نادي الاتحاد
الأرقام	١٤٥٧	٣٥٦٧٨٩١	٦٢٧٣	٢١٣٤	٣١٨٩	٣٥	٢٦٩٣٤٣
الكلمة معكوسة	ل ت ص ا	ع ز و م ل ا ب	ر ت ش ا	ر ب ك ا	ة ي م ك	ن م	د ي د ح ل ا
الكلمة الحقيقية	اتصل	بالموزع	اشتر	اكبر	كمية	من	الحديد



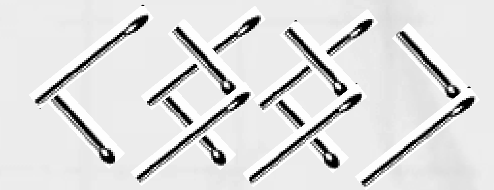
(١٢) أقصر طريق يقطعه العنكبوت هو ٤٠ قدم . أنظر الشكل ربما يدهشك أن العنكبوت قد مر بخمسة من الجوانب الستة للحجرة ولكنها الحقيقة.

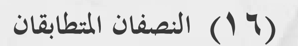


(١٣) يمكن أن يقطع الفرش إلى قطعتين فقط كما بالشكل كل درجة عرضها ٢٤ قدم
وعرضها ٣ أقدام فإذا أنزلت القطعة اليمنى بمقدار درجة واحدة لأسفل نحو اليسار
حصلت على مربع طول ضلعه ١٢ قدما .

(١٤) النقاط التسع :

(١٥) المعينات السبع




(١٦) النصفان المتطابقان



(١٧)

(١) كلب بيت سعد .

(٢) أسود.

(٣) من بيت خالد.

(٤) فوزية السعد.

(٥) علي السعد.

(٦) أشبيلية

(١٨) ولد جدي عام ١٨٤٩ م (الجذر التربيعي ٤٣) وولد ابني عام (١٩٣٦م (الجذر التربيعي ٤٤ وعليه فعمر المدرسة ٤٤ + ٤٣ = ٨٧ سنة واحتفلنا بمرور مائة سنة على إنشاؤها في عام ١٩٧٨م.

(١٩) كلا لم يصبح مجنوناً فقد تمنى أن يلعب فقط من الفريق خمسة مثل خليل ، بينما يلعب الستة الباقون بشكل جيد وعندها سيفوزون ولكن جميع اللاعبين لعبوا مثل خليل .

(٢٠) الإجابة مع السؤال.